

Ex1 1<sup>re</sup> fonction notée  $f(x)$ . Elle est sommable.

$$\mathcal{F}(y) = \int_{-1}^0 e^{-2i\pi xy} dx + \int_0^1 e^{-2i\pi xy} dx$$

⚠ la fonction sous l'intégrale n'est pas paire, elle n'est pas impaire non plus comme certains l'ont dit.

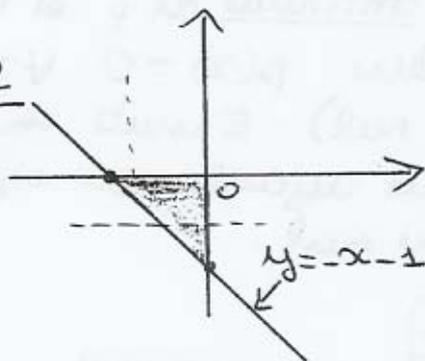
$$\mathcal{F}(y) = \frac{1 - \cos 2\pi y}{i\pi y}$$

2<sup>e</sup> fonction notée  $g(x)$

on remarque que  $g(x) = \alpha f(x)$  et qu'elle est sommable

$$\mathcal{F}(\alpha f(x))(y) = -\frac{1}{2i\pi} (\mathcal{F}f)'(y) = \frac{1}{\pi y} \sin 2\pi y + \frac{\cos 2\pi y - 1}{2\pi^2 y^2}$$

Ex2



Le domaine  $D$  est le domaine grisé

Sur  $D$  la fonction à intégrer est  $\leq 0$   
donc le résultat doit être  $\leq 0$ .

Elle est sommable sur  $D$ . On peut intégrer dans un ordre quelconque

$$I = \int_{-1}^0 \left( \int_{-1-y}^0 x dx \right) dy = \int_{-1}^0 \left( \int_{-x-1}^0 x dy \right) dx = -\frac{1}{6}$$

Ex3  $f$  est 4-périodique donc  $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$f$  est impaire donc les  $a_n, n > 0$ , sont nuls

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^{+2} f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{2} x\right) dx$$

⚠ (il faut intégrer sur une période,  $(-2, 2)$  ou  $(0, 4)$   
et si on choisit  $(0, 4)$  il ne faut pas remplacer  $f(x)$   
par  $x$  si  $x \in (2, 4)$ )

$$b_n = \frac{1}{2} \times 2 \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx = 4 \times \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Ex 4 1)  $(p|q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} p(x)q(x) dx$  définit-il un produit scalaire?

Avant tout il faut montrer que  $\int_0^{+\infty} e^{-x} p(x)q(x) dx$  a un sens pour tous les polynômes  $p$  et  $q$ . C'est l'existence.

Or  $x^2 p(x)q(x)e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc  $x^2 p(x)q(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

ce qui assure la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .  
Pour la linéarité, la positivité, aucun problème dans les copies. Ainsi que pour la symétrie.

En ce qui concerne la dernière propriété:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} p(x)q(x) dx = 0 \Rightarrow p = 0.$$

il faut invoquer la continuité de  $p$  et la positivité de  $e^{-x} p^2(x)$  pour conclure  $p(x) = 0 \forall x \in [0, +\infty[$  (car  $e^{-x}$  n'est jamais nul). Ensuite on déduit que  $p=0$  car un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

2) cf cours

$$\boxed{L_0 = 1}$$

$$L_1 = \alpha + \beta L_0 = x + \alpha$$

$$\text{avec } (L_0|L_1) = 0 = (1|x) + (1|\alpha) = 1 + \alpha$$

on a intérêt à remarquer que  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$  (Récurrence)  
pour ne pas faire trop d'IPP.

$$\text{donc } \boxed{L_1 = x - 1}$$

puis

$$L_2 = x^2 + \beta L_0 + \gamma L_1$$

$$= x^2 + \beta + \gamma(x-1)$$

$$\text{avec } (L_0|L_2) = 0 = (L_1|L_2)$$

on trouve  $\gamma = -4$  et  $\beta = -2$

$$\boxed{L_2 = x^2 - 4x + 2}$$

$\Delta$   $L_0, L_1, L_2$  sont orthogonaux. Ils forment une base orthogonale de  $F$ , pas une base orthonormale

$$(L_0|L_0) = 1 \quad (L_1|L_1) = 1 \quad (L_2|L_2) = 2$$

donc  $L'_0 = L_0$ ,  $L'_1 = L_1$ ,  $L'_2 = \frac{L_2}{2}$  forme une BON de  $F$

$$u = \frac{x^3}{6}$$

$$3) \text{ cf cours } u' = \sum_0^2 (L'_i | \frac{x^3}{6}) L'_i = \frac{3x^2}{2} - 3x + 1$$

$$\text{valeur demandé} = \|u - u'\|^2 = 1$$