

16-02-2001

Ex 1 $|\frac{\sum n x^n}{n!}| \leq \frac{|x|^n}{n!}$ terme général d'une série convergente, pour tout x .

$$\frac{\sum n x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(xe^i)^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_0^{\infty} \frac{(xe^i)^n}{n!} = e^{xe^i} = e^{x\cos 1 + ix\sin 1}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_0^{\infty} \frac{\sum n x^n}{n!} = e^{x\cos 1} \cos(x \sin 1)$$

Ex 2 $\frac{\sin z}{z-\pi i}$ est définie et holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{\pi i\}$.

on fait changement de variable $u = z - \pi i$: $\frac{\sin z}{z-\pi i} = -\frac{\sin u}{u} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} u^{2p} \quad \forall u$

$$\frac{\sin z}{z-\pi i} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)!} (\pi - u)^{2p} \quad \forall z \neq \pi i \quad \pi i \text{ singularité apparente}$$

Ex 3 Fonction à intégrer paire : on étudie la CV en $+\infty$ seulement :

$$\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} < \frac{1}{x^6} \quad \text{ce qui assure la CV en } +\infty \quad (6>1)$$

• calcul de $I = \int_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} dz$ $\gamma : -R \rightarrow R$

Les pts singuliers de la fonction à intégrer sont $\pm i, \pm 2i$
 Si $R > 2$ i et $2i$ sont à l'intérieur donc $I = 2\pi i [\operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(2i)]$

$$2i \text{ pôle simple} \quad \text{et résidu} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z-2i}{(z^2+1)^2(z-2i)(z+2i)} = \frac{1}{36i}$$

$$i \text{ est pôle double} \quad \text{car} \quad \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+4)} = -\frac{1}{12} \neq 0$$

$$\text{le résidu} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+4)} \right\} = -\frac{i}{36} = \frac{1}{36i}$$

d'où $\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} dz = \frac{\pi i}{9} \quad \forall R > 2$

on paramétrise et on trouve

$$\forall R > 2 \quad \frac{\pi i}{9} = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} + \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2 (R^2 e^{2i\theta} + 4)}$$

on fait tendre R vers $+\infty$

la 1^e intégrale tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$

la 2^e intégrale tend vers 0 :

$$\text{en effet } \left| \int_0^{\pi} \frac{i R e^{i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2 (R^2 e^{2i\theta} + 4)} \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R d\theta}{|R^2 e^{2i\theta} + 1|^2 |R^2 e^{2i\theta} + 4|}$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R d\theta}{(R^2 - 1)^2 (R^2 - 4)} = \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2 (R^2 - 4)} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$$

Conclusion

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)} = \frac{\pi}{9}}$$

Ex 4

$$\frac{p}{(p^2 + 1)(p + 4)} = \frac{\alpha}{p+4} + \frac{\beta p + \gamma}{p^2 + 1} \quad \alpha = -\frac{4}{17}, \beta = \frac{4}{17}, \gamma = \frac{1}{17}$$

l'original dans \mathcal{L} est donc

$$\boxed{(-\frac{4}{17} e^{-4t} + \frac{4}{17} \cos t + \frac{1}{17} \sin t) Y(t)}$$

Ex 5 $F = \mathcal{L}(x)$ $G = \mathcal{L}(y)$

$$\mathcal{L}(x')(p) = pF - 3 \quad \mathcal{L}(x'')(p) = p^2 F - 3p + 2$$

$$\mathcal{L}(y') = pG$$

En prenant les transformées de Laplace des 2 membres on trouve

$$\begin{cases} pF - 3 + pG = \frac{1}{p^2} \\ p^2 F - 3p + 2 - G = \frac{1}{p+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F + G = \frac{1}{p^3} + \frac{3}{p} \\ F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{1}{p^3} + \frac{3}{p} + \frac{1}{p+1} + 3p - 2 \right) \end{cases}$$

Il n'est pas recommandé de tout réduire au même dénominateur et de traiter chaque terme de la somme à sauvé

$$\frac{-2}{p^2 + 1}; \frac{3p}{p^2 + 1}, \frac{1}{(p+1)(p^2 + 1)}, \frac{3}{p(p^2 + 1)}, \frac{1}{p^3(p^2 + 1)}$$

en faisant une décomposition des 3 termes derniers en éléments simples (noter que les 2 derniers sont des fonctions impaires ce qui simplifie les calculs)

$$\frac{1}{(p+1)(p^2 + 1)} = \frac{1/2}{p+1} + \frac{-1/2 p + 1/2}{p^2 + 1}$$

$$\frac{3}{p(p^2 + 1)} = \frac{3}{p} + \frac{-3p}{p^2 + 1}$$

$$\frac{1}{p^3(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}$$