

# Mathématiques. Corrigé du contrôle du 03-02-03

Exercice 1  $y(t) \left[ \frac{5}{9} e^{2t} - \frac{5}{9} e^{-t} - \frac{2}{3} t e^{-t} \right] ; \quad y(t) [\cos t - \cos t \sqrt{2}]$

Exercice 2  $y(t) \cos at$  est nulle si  $t < 0$ , continue sur  $[0, +\infty]$  et est majorée en module par  $e^{|a|t}$ .  
 Pour calculer  $\mathcal{L}f$  on décompose  $\cos at$  en exponentielles.  
 $\mathcal{L}f = \frac{P^3}{P^4 + 4a^4}$  (on retrouve bien  $\frac{1}{P}$  si  $a=0$ )

Exercice 3

1)  $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} d\theta = 0$  car  $\frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta}$  est impaire.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{inx}}{2 + \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \frac{e^{inx}}{(2 + \cos \theta) i e^{i\theta}} \right) i e^{i\theta} d\theta = \int_{C+} g(z) dz \text{ avec}$$

$$g(z) = \frac{2 z^n}{i(z^2 + 4z + 1)} \quad \left( \text{on utilise } e^{inx} = (e^{iz})^n \text{ et } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)$$

les points singuliers de  $g$  sont :  $-2 - \sqrt{3}$  (hors du disque) et  $-2 + \sqrt{3}$

Le résidu de  $g$  en  $-2 + \sqrt{3}$  vaut  $\frac{(-2 + \sqrt{3})^n}{i\sqrt{3}}$  (pôle simple)

et l'intégrale vaut  $\frac{2\pi (-2 + \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}$  (théorème des résidus)

2)  $f$  est paire ; les coefficients de Fourier  $b_n$  sont nuls ;  $T = 2\pi$ .

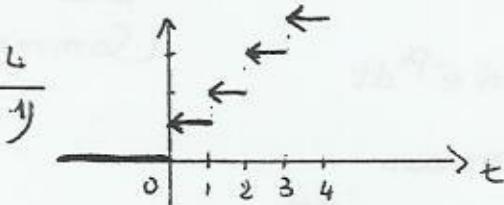
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos nx}{2 + \cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} (-2 + \sqrt{3})^n$$

La série de Fourier de  $f$  est

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} (-2 + \sqrt{3})^n \cos nx$$

Elle converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  vers  $\frac{1}{2 + \cos x}$  car le théorème de Dirichlet est applicable :  $\frac{1}{2 + \cos x}$  est périodique et de classe  $C^\infty$ .

Exercice 4



2) si  $t \geq 0$   $\exists m_0 \quad n_0 \leq t < n_0 + 1$   
 $f(t) = n_0 + 1 \leq t + 1$

3)  $f(t+1) = f(t) + 1$  si  $t \geq 0$ .

4)  $f$  est nulle sur  $]-\infty, 0[$  ; Ses seuls points de discontinuité sont  $t = m \quad m = 0, 1, 2, \dots$  et en ces points  $f$  admet une limite à droite et une limite à gauche,

Enfin pour  $\alpha > 0$  on a la majoration  $|f(t)| \leq e^{\alpha t}$  pour  $t$  assez grand : en effet si  $t \geq 0$   $|ft|e^{-\alpha t} \leq (t+1)e^{-\alpha t}$  et  $(t+1)e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ . On déduit que  $f \in L(\alpha)$ . Conclusion  $f \in L$ .

D'après le cours si  $f \in L(\alpha)$ ,  $Lf(p)$  existe pour  $\Re p > \alpha$  ; comme  $f \in L(\alpha) \forall \alpha > 0$ ,  $Lf(p)$  existe pour  $\Re p > 0$ .

$$\begin{aligned} 5) F(p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^1 f(t)e^{-pt} dt + \int_1^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^1 f(t)e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} f(u+1)e^{-p(u+1)} du \\ &= \int_0^1 f(t)e^{-pt} + e^{-p} \int_0^{+\infty} (f(u)+1)e^{-pu} du = \left( \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} \right) + e^{-p} \left( F(p) + \frac{1}{p} \right) \\ \Rightarrow F(p) &= \frac{1}{p(1-e^{-p})} \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le théorème de Lebesgue pour montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} Y(t-n) \right) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} Y(t-n) e^{-pt} dt$$

pour cela,  $p$  étant fixé avec  $\Re p > 0$ , on introduit

$$\begin{aligned} g_N(t) &= \sum_{n=0}^N Y(t-n) e^{-pt} : \text{ si } N \rightarrow +\infty \quad g_N(t) \rightarrow f(t) e^{-pt} \text{ partout} \\ \text{et on a la majoration} \quad |g_N(t)| &\leq \sum_{n=0}^N Y(t-n) e^{-\Re p t} \\ &\leq (t+1) e^{-\Re p t} \quad \text{car } \forall n \end{aligned}$$

la fonction majorante est sommable sur  $[0, +\infty]$ .

Le théorème de Lebesgue dit alors que

$$\int_0^{+\infty} g_N dt \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} g_N dt$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^N Y(t-n) e^{-pt} \right) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} Y(t-n) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} Y(t-n) e^{-pt} dt \quad (\text{Somme finie}) \end{aligned}$$

Il reste à calculer la dernière expression

$$\text{on a : } \int_0^{+\infty} Y(t-n) e^{-pt} dt = \int_n^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pn}}{p}$$

D'où le résultat

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} = \frac{1}{p} \frac{1}{1-e^{-p}}$$