

Contrôle du 16 janvier 2002
MATHS

Ex1 soit $z \neq 0$. Etude de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \left| \frac{4n+1}{4n^2+2n} z^{2n} \right|$.

la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ quand $n \rightarrow \infty$ est $|z|^2$; donc $R = 1$

Calcul de la somme pour $x \in]-1, +1[$, $\frac{4n+1}{4n^2+2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

La série $\sum_1^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$ est convergente et a pour somme $S_1(x)$

$$S_1(0) = 0 \text{ et } S'_1(x) = \sum_1^{\infty} x^{2n-1} = x \sum_0^{\infty} x^{2n} = \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\text{d'où } S_1(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

La série $\sum_1^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ est convergente et a pour somme $S_2(x)$.

$$\text{si } x \neq 0 \quad \sum_1^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_1^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{x} (\operatorname{argth} x - x)$$

$$\text{si } x = 0 \quad S_2(0) = 0$$

$$\text{Résultat } S_1(x) + S_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \frac{1}{x} (\operatorname{argth} x - x) \text{ pour } x \neq 0$$

Ex2 f est définie sur $C \setminus \{0, 1\}$

0 est un pôle double car $z^2 f(z) = (z-2) \sin \frac{1}{1-z} \xrightarrow[z \rightarrow 0]{} -2\sin 1 \neq 0$

1 est un point singulier essentiel car $\frac{z-2}{z^2}$ a une limite (-1)

quand $z \rightarrow 1$ mais $\sin \frac{1}{1-z}$ n'a pas de limite quand ($z \rightarrow 1$)
 (donc 1 n'est pas une singularité apparente) et $\forall k \in \mathbb{N}$

$(z-1)^k \sin \frac{1}{1-z}$ n'a pas de limite quand $z \rightarrow 1$ (donc 1 n'est pas un pôle d'ordre k). Pour montrer que $(z-1)^k \sin \frac{1}{1-z}$ n'a pas de limite quand $z \rightarrow 1$ il suffit de regarder ce qui se passe quand $1-z$ est un imaginaire pur tendant vers 0 car alors le "sin" devient un "sh" avec une variable réelle tendant vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Calcul du résidu en } 0: & \text{ formule: } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} ((z-2) \sin \frac{1}{1-z}) \\ &= \sin 1 - 2 \cos 1 \end{aligned}$$

Ex 3 Supposons que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de l'équa-diff sur \mathbb{R} . En dérivant 2 fois termes à terme on obtient

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \forall x$$

qui s'écrit aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \forall x$$

(coeff de x^0): $-a_0 = 0$

(coeff de x^m pour $m \geq 1$): $m(m+1) a_{m+1} - a_m = 0$

ce qui nous donne $a_0 = 0$, a_1 quelconque, $a_m = a_1 \frac{1}{m!(m-1)!}$

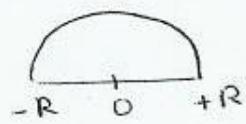
Les séries $\sum a_n x^n$ avec ces a_n ont pour rayon de convergence $R = +\infty$, et vérifient bien $x y'' - y = 0 \quad \forall x$.

Ex 4

$\frac{1}{1+x^6}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

en $\pm\infty$ $\frac{1}{1+x^6} \sim \frac{1}{x^6}$ donc l'intégrale de $\frac{1}{1+x^6}$ sur $\mathbb{C}\mathbb{V}$ en $\pm\infty$

• Calcul de $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^6}$ par les résidus pour γ :



— si $R < 1$ pas de point singulier de $\frac{1}{1+z^6}$ entouré par γ donc l'intégrale vaut 0

— si $R > 1$ il y a 3 points singuliers de $\frac{1}{1+z^6}$ entouré par γ : $z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$ $z_2 = e^{\frac{i\pi}{2}}$ $z_3 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$

le résidu en z_i (pôle simple) est $\lim_{z \rightarrow z_i} \frac{z - z_i}{1+z^6}$ qui vaut (cf cours)

$$\frac{1}{6z_i^5} = -\frac{z_i}{6}$$

l'intégrale est alors égale à $2i\pi \times \left(\frac{-1}{6} e^{\frac{i\pi}{6}} + \frac{-1}{6} i + \frac{-1}{6} e^{\frac{5i\pi}{6}} \right)$

• Evaluation de la même intégrale $\int_{[-R, +R]} \frac{dx}{1+x^6}$ sur γ avec paramétrage

$$\int_{[-R, +R]} \frac{dx}{1+x^6} = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^6} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^6} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{iR e^{i\theta} d\theta}{1+R^6 e^{6i\theta}} \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^6 - 1} d\theta = \frac{R\pi}{R^6 - 1} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$$

• Conclusion: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi i}{3}$