

$$8\omega_0^2 x_1'' + 8\omega_0^2 x_1 - 3\omega_0^2 x_2 - 5\omega_0^2 x_3 = 0$$

$$3x_2'' - 3\omega_0^2 x_1 + 12\omega_0^2 x_2 - 3\omega_0^2 x_3 = 0$$

$$x_3'' - 5\omega_0^2 x_1 - 3\omega_0^2 x_2 + 8\omega_0^2 x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 8\omega_0^2 - \omega^2 & -3\omega_0^2 & -5\omega_0^2 \\ -3\omega_0^2 & 12\omega_0^2 - 3\omega^2 & -3\omega_0^2 \\ -5\omega_0^2 & -3\omega_0^2 & 8\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 & 6\omega_0^2 - 3\omega^2 & -\omega^2 \\ -3\omega_0^2 & 12\omega_0^2 - 3\omega^2 & -3\omega_0^2 \\ -5\omega_0^2 & -3\omega_0^2 & 8\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 & 6\omega_0^2 - 3\omega^2 & 0 \\ -3\omega_0^2 & 12\omega_0^2 - 3\omega^2 & 0 \\ -5\omega_0^2 & -3\omega_0^2 & 13\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(13\omega_0^2 - \omega^2) \left[3\omega_0^2 (6\omega_0^2 - 3\omega^2) - \omega^2 (12\omega_0^2 - 3\omega^2) \right] = 0$$

$$(13\omega_0^2 - \omega^2) \left[3\omega^4 - 24\omega_0^2 \omega^2 + 18\omega_0^4 \right] = 0$$

$$3(13\omega_0^2 - \omega^2) (\omega^4 - 7\omega_0^2 \omega^2 + 6\omega_0^4)$$

$$\Delta = (49 - 24)\omega_0^4 = 25\omega_0^4$$

$$\omega^2 = \frac{7\omega_0^2 \pm 5\omega_0^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{7\omega_0^2 + 5\omega_0^2}{2} \rightarrow \omega_0^2 \\ \omega^2 &= \frac{7\omega_0^2 - 5\omega_0^2}{2} \rightarrow 6\omega_0^2 \end{aligned}$$

$$\omega^L = \omega_0^2$$

$$\begin{cases} 2A - 3B - 5C = 0 \\ -5A - 3B + 7C = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} A = C \\ 2A = 3B \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

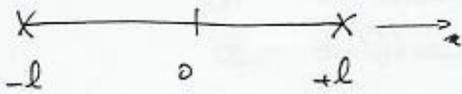
$$\omega^L = 6\omega_0^2$$

$$\begin{cases} 2A - 3B - 5C = 0 \\ -5A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} A = C \\ B = -A \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega^L = 13\omega_0^2$$

$$\begin{cases} -5A - 3B - 5C = 0 \\ -3A - 27B - 3C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5A + 3B + 5C = 0 \\ A + 9B + C = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} B = 0 \\ C = -A \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



1^{er} E.P.D.

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + f(x, t)$$

matériau homogène $\Rightarrow \rho, E$ indépendants de x
 section droite constante $\Rightarrow S, I$ indépendants de x
 pas de densité linéique de charge $\Rightarrow f(x, t) = 0$.

\Rightarrow E.P.D. simplifiée:

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

2^{es} Méthode de Bernoulli = séparation des variables.

$$v(x, t) = Y(x) \cdot q(t)$$

dans l'E.P.D.

$$\rho S Y q'' = - EI Y^{(4)} q$$

soit

$$\frac{q''}{q} = - \frac{EI Y^{(4)}}{\rho S Y} = - \omega^2 \quad \text{deux parts de variables}$$

d'où

$$q'' + \omega^2 q = 0 \Rightarrow q(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

et en plus $k^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI}$

$$Y^{(4)} - k^4 Y = 0 \Rightarrow Y(x) = A \cosh kx + B \sinh kx + C \cos kx + D \sin kx$$

3^{es} Conditions aux limites

$x = -l$ appui $\Rightarrow v(-l, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow Y(-l) \cdot q(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow Y(-l) = 0$

$\alpha M(-l, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow EI Y''(-l) \cdot q(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow Y''(-l) = 0$

$x = l$ appui $\Rightarrow v(l, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow Y(l) \cdot q(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow Y(l) = 0$

$\alpha M(l, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow EI Y''(l) \cdot q(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow Y''(l) = 0$

49 2 feuilles

$$Y(l) = 0 \Rightarrow A \cosh l - B \sinh l + C \cosh l - D \sinh l = 0 \quad (1)$$

$$Y'(l) = 0 \Rightarrow k(A \sinh l - B \cosh l - C \sinh l + D \cosh l) = 0 \quad (2)$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow A \cosh 0 + B \sinh 0 + C \cosh 0 + D \sinh 0 = 0 \quad (3)$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow k^2(A \sinh 0 + B \cosh 0 - C \sinh 0 - D \cosh 0) = 0 \quad (4)$$

$k = 0 \Rightarrow \omega = 0$ sans intérêt. \Rightarrow on peut simplifier par k^2

$$(1) + (2) \Rightarrow A \cosh l - B \sinh l = 0 \quad (5)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow C \cosh l - D \sinh l = 0 \quad (6)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow A \cosh l + B \sinh l = 0 \quad (7)$$

$$(3) - (4) \Rightarrow C \cosh l + D \sinh l = 0 \quad (8)$$

$$(5) + (7) \Rightarrow A \cosh l = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$(5) - (7) \Rightarrow B \sinh l = 0 \Rightarrow B = 0 \quad \text{car } l = 0 \text{ sans intérêt}$$

$$(6) + (8) \Rightarrow C \cosh l = 0 \quad (9)$$

$$(6) - (8) \Rightarrow D \sinh l = 0 \quad (10)$$

(9) et (10) \Rightarrow 4 possibilités.

$\rightarrow C = 0$ et $D = 0$ solution triviale sans intérêt

$\rightarrow \cosh l = 0$ et $\sinh l = 0$ impossible.

$\rightarrow C = 0$ et $\sinh l = 0$ sans feuille

$\rightarrow D = 0$ et $\cosh l = 0$ sans feuille

une feuille

$D = 0$ $\boxed{\cosh l = 0}$ est aux pulsations propres

$$\cosh l = 0 \Rightarrow (kl)_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_n = (2n+1)\frac{\pi}{l} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\omega_n = (2n+1)\frac{2\pi l}{4l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad n \in \mathbb{N}}$$

fréquences propres

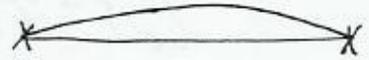
$$A = B = D = 0 \quad C = 1.$$

$$\boxed{Y_n(x) = \cosh(k_n x) = \cosh\left((2n+1)\frac{\pi x}{l}\right) \quad n \in \mathbb{N}}$$

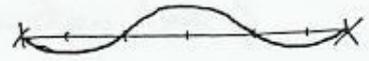
formes propres

Déterminé des deux premiers modes

$$n=0 \quad Y_0(x) = \cos\left(\frac{0\pi x}{2l}\right)$$



$$n=1 \quad Y_1(x) = \cos\left(\frac{1\pi x}{2l}\right)$$



2ème famille

$C=0$ $\boxed{\text{seul } l=0}$ e.g. deux pulsations propres

$$\text{seul } l=0 \Rightarrow (kl)_n = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$\boxed{\omega_n = \frac{n\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

pulsations propres

$$A=B=C=0 \quad D=1$$

$$\boxed{Y_n(x) = \sin(k_n x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

fonnes propres.

Déterminé des deux premiers modes

$$n=1 \quad Y_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$



$$n=2 \quad Y_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$



5^e Solution générale

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x) \left[\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t \right] + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \left[\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t \right]$$

C.I.

$$v(x,0) = v_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,0) = 0$$

2ème C.I. $\Rightarrow \beta_n$ et β_{2n} seuls.

1ère C.I.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \alpha_{2n} = v_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)$$

Pas de masse ponctuelle autoformable dans la structure ou se
sit de Wünnel par déterminées des α

$$\int_{-l}^l \rho S Y_j \left[\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \alpha_{-n} \right] dx = \int_{-l}^l \rho S Y_j v_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) dx$$

Y_j sont continues et bornées \Rightarrow on peut passer \int et \sum .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_{-l}^l \rho S Y_j Y_n dx + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \int_{-l}^l \rho S Y_j Y_n dx = \rho S v_0 \int_{-l}^l Y_j \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) dx$$

1er cas Y_j est une forme propre de la 1^{ère} famille, on fait de l'orthogonalité des formes propres le 2nd \sum est nul et dans le 1^{er} \sum un seul terme est non nul.

$$\alpha_j \rho S \int_{-l}^l Y_j^2 dx = \rho S v_0 \int_{-l}^l Y_j \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) dx$$

$$\alpha_j \int_{-l}^l \cos^2\left(\frac{(2j+1)\pi x}{2l}\right) dx = v_0 \int_{-l}^l \cos\left(\frac{(2j+1)\pi x}{2l}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) dx$$

$$\frac{\alpha_j}{2} \int_{-l}^l \left[1 + \cos\left(\frac{(2j+1)\pi x}{l}\right) \right] dx = \frac{v_0}{2} \int_{-l}^l \left[\cos\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\right) + \cos\left(\frac{(2j+3)\pi x}{2l}\right) \right] dx$$

si $j \neq 1$

$$\alpha_j \left[x + \frac{l}{(2j+1)\pi} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi x}{l}\right) \right]_{-l}^l = v_0 \left[\frac{2l}{(2j-1)\pi} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2l}\right) + \frac{l}{(2j+3)\pi} \sin\left(\frac{(2j+3)\pi x}{2l}\right) \right]_{-l}^l$$

$$\alpha_j \cdot 2l = 0$$

si $j=1$

$$\alpha_1 \cdot 2l = v_0 \cdot 2l \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = v_0$$

2^{ème} cas γ_j est une forme propre de la 2^{ème} famille

$\Rightarrow 1^{er} \Sigma$ est nul.

$\Rightarrow 2^{er} \Sigma$ 1 seul terme non nul.

$$\alpha_j \rho S \int_{-l}^{+l} \gamma_j^2 dx = \rho S v_0 \int_{-l}^{+l} \gamma_j \cos \frac{5\pi x}{2l} dx$$

$$\alpha_j \int_{-l}^{+l} \sin^2 \left(\frac{j\pi x}{l} \right) dx = v_0 \int_{-l}^{+l} \sin \left(\frac{j\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{5\pi x}{2l} \right) dx$$

$$\frac{\alpha_j}{2} \int_{-l}^{+l} \left[1 - \cos \left(\frac{2j\pi x}{l} \right) \right] dx = \frac{v_0}{2} \int_{-l}^{+l} \left[\sin \left(\left(j - \frac{5}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \right) + \sin \left(\left(j + \frac{5}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \right) \right] dx$$

$$\alpha_j \left[x - \frac{l}{2j\pi} \sin \frac{2j\pi x}{l} \right]_{-l}^{+l} = v_0 \left[\frac{-l}{\left(j - \frac{5}{2} \right) \pi} \cos \left(\left(j - \frac{5}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \right) - \frac{l}{\left(j + \frac{5}{2} \right) \pi} \cos \left(\left(j + \frac{5}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \right) \right]_{-l}^{+l}$$

$$2l\alpha_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0$$

La solution se résume donc à :

$$v(x,t) = v_0 \cos \left(\frac{5\pi x}{2l} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi^2 l}{4l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} t \right)$$

On n'obtient que la 2^{ème} mode de la 1^{ère} famille car ~~les~~ les conditions aux limites correspondent à ce mode.