

BREF CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE VIBRATIONS
DU 09/03/2002

1er Problème

1) Etude du système du spectre.

- Le choix des paramètres prend en compte les fixations
- les guides ne reçoivent aucun effort lors le sens de déplacement des solides
- le déplacement de la résultante dépendra que les profils sur l'une ou l'autre par droite solide :

$$(S1) \Rightarrow x_2'' + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_3 = f_0 \cos \omega t$$

$$(S2) \Rightarrow x_2'' + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_3 = -f_0 \cos \omega t$$

$$(S3) \Rightarrow 4x_3'' - \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 + 6\omega_0^2 x_3 = 0$$

2) Etude des vibrations libres (absence d'excitation) ($f_0 = 0$)

Système conservatif \Rightarrow sol des vibrations libres = Courbure brisée des modes propres. Mode propre \Rightarrow révolution et réflexion sur tous les paramètres.

Soit $x_1 = A \cos(\omega t + \phi)$; $x_2 = B \cos(\omega t + \phi)$ et $x_3 = C \cos(\omega t + \phi)$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A - \omega_0^2 C = 0$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) B - \omega_0^2 C = 0$$

$$-\omega_0^2 A - \omega_0^2 B + (\omega_0^2 - 6\omega_0^2) C = 0$$

Système linéaire homogène \Rightarrow sol. générée sous certaines conditions $\det = 0$

$$\det = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2)(2\omega^2 - 5\omega_0^2) = 0$$

Pour chaque valeur trouvée on résout le système linéaire pour obtenir les formes propres

$$\omega^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}; \quad \omega^2 = 2\omega_0^2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}; \quad \omega^2 = \frac{5}{2}\omega_0^2 \Rightarrow \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Solutions générales des vibrations libres

$$x_1 = R_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + R_2 \cos(\omega_0 \sqrt{2}t + \phi_2) + 2R_3 \cos(\omega_0 \sqrt{\frac{5}{2}}t + \phi_3)$$

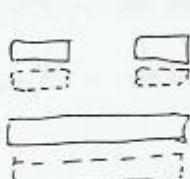
$$x_2 = R_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) - R_2 \cos(\omega_0 \sqrt{2}t + \phi_2) + 2R_3 \cos(\omega_0 \sqrt{\frac{5}{2}}t + \phi_3)$$

$$x_3 = R_2 \cos(\omega_0 t + \phi_1) - R_3 \cos(\omega_0 \sqrt{2}t + \phi_2)$$

1^{er} mode

2nd mode

3rd mode



Système vibratoire

Système conservatif en énergie totale \Rightarrow solutions synchrones avec l'énergie.

$$\Rightarrow x_1 = A \cos \omega t; \quad x_2 = B \sin \omega t; \quad x_3 = C \text{ const.}$$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) A - \omega_0^2 C = J_0$$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) B - \omega_0^2 C = -J_0$$

$$-\omega_0^2 A - \omega_0^2 B + (6\omega_0^2 - 4\omega^2) C = 0$$

Résolution par méthode de CRAMER

$$A = \frac{J_0}{2\omega_0^2 - \omega^2} = -B \quad \text{et} \quad C = 0$$

Énergie

L'énergie est proportionnelle au vecteur propre des 2 premiers modes, le système ne répond que sur ce mode.

de Problème

$$1^{\text{er}} \text{ Hôte de charge fixe} \quad u = \rho S l$$

2^e EDP

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (E S \frac{\partial u}{\partial x}) \quad \text{car } E \text{ et } S \text{ sont constantes donc}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3^e Forme des solutions

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= X_1(x) \cdot q(t) \quad \text{pour la partie superficielle} \\ u_2(x, t) &= X_2(x) \cdot q(t) \quad \text{pour la partie profonde} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{si } q(t) \text{ est} \\ \text{un const.} \end{array} \right\} \text{le système est conservatif.}$$

et u_1 et u_2 doivent vérifier l'EDP.

$$\rho X_1 q'' = E X_1' q \quad \text{et} \quad \rho X_2 q'' = E X_2' q$$

d'où

$$\frac{q''}{q} = \frac{E X_1''}{\rho X_1} = \frac{E X_2''}{\rho X_2} = -\omega^2 \quad (\text{équation fond de l'énergie})$$

$$\text{ou bien } \omega^2 = \frac{\rho}{E} X_1''$$

$$q'' + \omega^2 q = 0 \Rightarrow q = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

$$X_1'' + k^2 X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx$$

$$X_2'' + k^2 X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = A_2 \cos kx + B_2 \sin kx$$

! C.L. du Plo.

$$u_1(0,t) = 0 \quad \text{en extérieur}$$

$$u_2(0,t) = 0 \quad \text{en extérieur}$$

$$u_1(l,t) = u_2(l,t) \quad \text{au déplacement des 2 extrémités}$$

$$M \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2}(l,t) = -N_x(l,t) - N_z(l,t) \quad \text{M de des result démontrée en projection sur la force M.}$$

soit

$$X_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$X_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$X_1(l) = X_2(l) \Rightarrow B_1 \text{ suhl} = B_2 \text{ suhl}$$

$$\omega^2 M X_1(l) = E S (X'_1(l) + X'_2(l)) \Rightarrow \omega^2 M B_1 \text{ suhl} = E S k \cosh(l(B_1 + B_2))$$

soit

$$B_1 \text{ suhl} - B_2 \text{ suhl} = 0$$

$$B_2 \left(\frac{E S k}{\omega^2 M} \cosh(l) - \text{suhl} \right) + B_1 \frac{E S k}{\omega^2 M} \text{cosh} l = 0$$

$$\text{avec } \frac{E S k}{\omega^2 M} = \frac{E S k \rho}{h^2 E H} = \frac{\rho S l}{H k l} = \frac{m}{H k l}$$

soit

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad B_1 \text{ suhl} - B_2 \text{ suhl} &= 0 \\ \textcircled{2} \quad B_2 \left(\frac{m}{H k l} \cosh(l) - \text{suhl} \right) + B_1 \frac{m}{H k l} \cosh(l) &= 0 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \text{sys lin homogène} \\ \Rightarrow \text{sol trouvée sauf} \\ \text{si } \det = 0 \end{array} \right]$$

$$\det = \text{suhl} \int \frac{2 m}{H k l} \cosh(l) - \text{suhl} = 0$$

\Rightarrow 2 familles de solutions l'une pour $\text{suhl} = 0$

l'autre pour $\frac{2 m}{H k l} \cosh(l) - \text{suhl} = 0$

soit 1re famille de solutions

$$\text{si } \text{suhl} = 0 \Rightarrow (kl)_n = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\boxed{a_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{fréquences propres}$$

6) on résout le système linéaire homogène pour $\sin \theta l = 0 \Rightarrow \cos \theta l \neq 0$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \beta_2 = -\beta_1 \quad \text{on choisit } \beta_1 = 1 \Rightarrow \beta_2 = -1$$

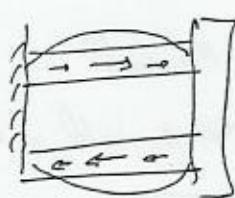
$$X_{u,1,1}(x) = \sin\left(\frac{u\pi x}{l}\right)$$

$$X_{u,2,1}(x) = -\sin\left(\frac{u\pi x}{l}\right)$$

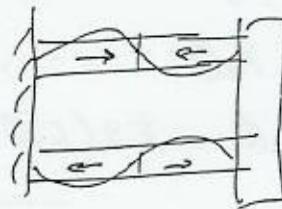
c) Mouvement de θ .

$$X_{u,1,1}(0) = X_{u,2,1}(l) = 0 \quad \theta \text{ est annulable.}$$

d) Deux premiers modes.



1^{er} mode

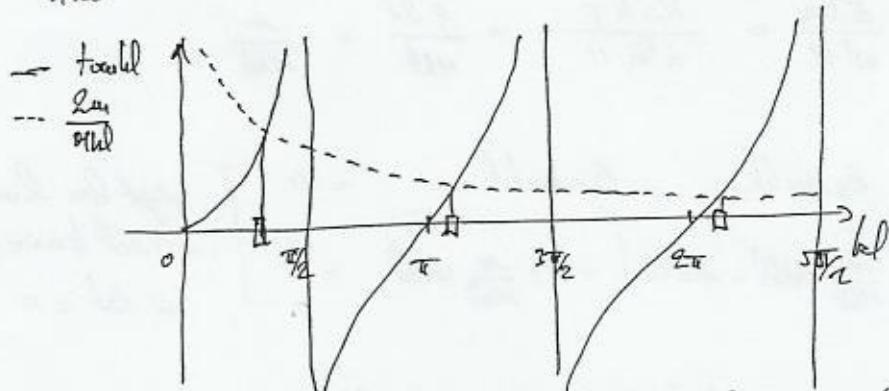


2^{ème} mode

7) 2^{ème} partie

a) Perturbations propres

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cos \theta l - u \sin \theta l = 0 \Rightarrow \cos \theta l \neq 0 \Rightarrow \tan \theta l = \frac{\partial u}{\partial t l}$$



b) Formes propres : on résout le système linéaire homogène sous
 $\sin \theta l = \frac{2u}{l} \cos \theta l$ et $\cos \theta l \neq 0$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \beta_2 = \beta_1$$

$$X_{u,1,2}(x) = \sin \theta_1 x = X_{u,2,2}(x)$$

c) Mouvement de θ .

$$X_{u,1,2}(0) = X_{u,2,2}(l) = \sin \theta_1 l \neq 0$$

θ est mobile