Variables d'état et équation d'état : Cas monovariable

Soit le système du 1er ordre

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

où $x(t)$ et $u(t)$ sont définis comme suit

$$\begin{array}{rcl} x & : & [0\ \infty] \longrightarrow \mathbb{R} \\ u & : & [0\ \infty] \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

En prenant la transformée en s des deux membres de l'équation différentielle précédente on obtient

$$sX(s) - x(0^+) = aX(s) + bU(s)$$

où $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ et $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$.

Par conséquent la transformée en s de $x(t)$ est donnée par

$$X(s) = \frac{b}{s-a}U(s) \; + \; \frac{1}{s-a}x(0^+)$$

autrement dit la donnée de $u(t)$ et de $x(0^+)$ nous permet d’avoir $x(t), \forall t > 0.$

En effet la transformée inverse nous donne

$$x(t) = x(0^+)\mathbf{e}^{at} + b\int_0^t \mathbf{e}^{a(t-\tau)}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

qui constitue la solution de l'équation différentielle précédente. Posons par la suite

$$\varphi(t) = \mathbf{e}^{at}$$

alors $x(t)$ s'écrit alors

$$x(t) = x(0^+)\varphi(t) + b\int_0^t \varphi(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

A titre d'exemple, si la variable u(t) est un échelon unité donnée par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

alors $U(s) = \dfrac{1}{s}$ et ainsi on a

$$X(s) = \frac{x(0^+)}{s-a} + \frac{b}{s(s-a)}$$

autrement dit

$$x(t) = x(0^+)\varphi(t) - \frac{b}{a}(1 - \varphi(t))$$

et finalement

$$x(t) = x(0^+)\mathbf{e}^{at} - \frac{b}{a}\left(1 - \mathbf{e}^{at}\right)$$

Dans ce cas les variables $x(t)$ et $u(t)$ sont des vecteurs définis comme suit:

$$\begin{aligned} x &: [0\ \ \infty] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &: [0\ \ \infty] \longrightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

où n désigne le nombre de variable d'état et m le nombre d'entrées.
Généralement, nous n'avons pas accès au vecteur d'état mais plutôt à une autre variable appelée sortie dépendant de l'état et de l'entrée que l'on définit comme suit

$$y \ : \ [0\ \ \infty] \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Variables d’état et équation d’état : Cas multivariable

Pour un système linéaire, l’équation d’état est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

où A, B, C et D sont des matrices ayant les dimensions suivantes

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n\mathrm{x}n} \\ B &\in \mathbb{R}^{n\mathrm{x}m} \\ C &\in \mathbb{R}^{p\mathrm{x}n} \\ D &\in \mathbb{R}^{p\mathrm{x}m} \end{aligned}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 1

Soit la transmittance

$$F(s) = \frac{1}{a + bs + cs^2 + s^3}$$

En posant $Y(s) = F(s)U(s)$, nous avons l'équation différentielle suivante

$$y^{(3)}(t) + cy^{(2)}(t) + by^{(1)}(t) + ay(t) = u(t)$$

Introduisant alors les nouvelles variables

$$\begin{aligned} x_1 &= y(t) \\ x_2 &= \dot{y}(t) = \dot{x}_1 \\ x_3 &= y^{(2)}(t) = \dot{x}_2 \end{aligned}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 1 (Suite)

L'équation différentielle s'écrit alors comme suit

$$\dot{x}_3 = -cx_3(t) - bx_2(t) - ax_1(t) + u(t)$$

ce que l'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Considérons maintenant la transmittance

$$F(s) = \frac{a' + b's + c's^2}{a + bs + cs^2 + s^3} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

avec

$$\begin{aligned} N(s) &= a' + b's + c's^2 \\ D(s) &= a + bs + cs^2 + s^3 \end{aligned}$$

Rappelons que la transformée en s de la sortie est donnée par

$$Y(s) = F(s)U(s)$$

Variables d'état et équation d'état : Example 2 (Suite)

La relation entrée sortie dans le domaine temporelle est alors donnée par l'équation différentielle suivante

$$y^{(3)}(t) + cy^{(2)}(t) + by^{(1)}(t) + ay(t) \; = \; a'u(t) + b'\dot{u}(t) + c'\ddot{u}(t)$$

Remarquons aussi que $Y(s) = N(s)D^{-1}(s)U(s)$ nous incite par exemple à introduire la variable

$$V(s) = D^{-1}(s)U(s)$$

et réécrire le système sous la forme

$$\begin{aligned} Y(s) &= N(s)V(s) \\ U(s) &= D(s)V(s) \end{aligned}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 2 (Suite)

autrement dit, $y(t)$ et $v(t)$ sont liées par l'équation différentielle suivante

$$y(t) = a'v(t) + b'\dot{v}(t) + c'\ddot{v}(t)$$

Et en introduisant les nouvelles variables

$$\begin{aligned} x_1 &= v(t) \\ x_2 &= \dot{v}(t) = \dot{x}_1 \\ x_3 &= v^{(2)}(t) = \dot{x}_2 \end{aligned}$$

nous avons

$$y(t) = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 2 (Suite)

De même, $u(t)$ et $v(t)$ sont liées par

$$v^{(3)}(t) + cv^{(2)}(t) + bv^{(1)}(t) + av(t) = u(t)$$

et compte tenu des variables x_1, x_2 et x_3 introduites plut haut, nous avons la représentation suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 3

Reprenons l'équation différentielle de l'exemple précédent, soit

$$y^{(3)}(t) + cy^{(2)}(t) + by^{(1)}(t) + ay(t) = c'u^{(2)} + b'u^{(1)} + a'u$$

que l'on peux réécrire sous la forme suivante

$$y^{(3)} = a'u - ay + \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Big(b'u - by\Big) + \frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}\Big(c'u - cy\Big) \qquad (1)$$

Posons

$$\dot{x}_1 = a'u - ay$$

Variables d'état et équation d'état : Example 3 (Suite)

alors l'équation (1) pourra se réécrire comme suit

$$y^{(3)} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Big(x_1 + b'u - by\Big) + \frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}\Big(c'u - cy\Big) \tag{2}$$

de même si on pose aussi

$$\dot{x}_2 = x_1 + b'u - by$$

alors (2) devient

$$y^{(3)} = \frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}\Big(x_2 + c'u - cy\Big) \tag{3}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 3 (Suite)

et donc si on pose maintenant

$$\dot{x}_3(t) = x_2 + c'u - cy$$

alors on a $y^{(3)} = x_3^{(3)}$.

En résumé on a

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & -ay(t) + a'u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1(t) - by(t) + b'u(t) \\ \dot{x}_3(t) & = & x_2(t) - cy(t) + c'u(t) \\ y(t) & = & x_3(t) \end{array}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 3 (Suite)

D'une manière compacte, on a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Variables d'état et équation d'état : Example 3 (Suite)

Autrement dit pour le même système on a deux représentations.

$$\left(\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{bmatrix} & \vdots & \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \\
\cdots\;\cdots\;\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \vdots & 0
\end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} & \vdots & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\cdots\;\cdots\;\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
\begin{bmatrix} a' & b' & c' \end{bmatrix} & \vdots & 0
\end{array}\right)$$

et en d'autres termes

$$\left(D + C\left(s\mathbb{I} - A\right)^{-1} B\right)^{\top} = \left(D + B^{\top}\left(s\mathbb{I} - A^{\top}\right)^{-1} C^{\top}\right)$$

Solution de l'équation d'état

L'équation d'état d'un système linéaire à temps invariant est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

En passant à la transformée en s, on obtient

$$sX(s) - x(0^+) = AX(s) + BU(s)$$

d'où

$$X(s) = \left(sI - A\right)^{-1} x(0^+) + \left(sI - A\right)^{-1} BU(s)$$

En posant

$$\Phi(s) = \Big(sI - A\Big)^{-1}$$

alors on obtient

$$X(s) = \Phi(s)x(0^+) + \Phi(s)BU(s)$$

Dans le cas où l'on pose $u(t) = 0, \forall t \geq 0$, les expressions précédentes deviennent

$$X(s) = \Phi(s)x(0^+)$$

ce qui donne dans le domaine temporel

$$x(t) = \varphi(t)x(0^+)$$

et comme

$$\dot{x} = \dot{\varphi}(t)x(0^+) = A\varphi(t)x(0^+)$$

pour tout état initial $x(0^+)$, alors la fonction $\varphi(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t)$$

dont la solution est donnée par

$$\varphi(t) = \mathbf{e}^{At}$$

En effet remarquons que comme

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$$

alors la dérivée par rapport au temps donne

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathbf{e}^{At} \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^i$$

Dérivée que l'on peut écrire aussi comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathbf{e}^{At} &= A\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}A^{i-1}\\ &= A\left(\mathbb{I}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{i}}{i!}A^{i}\right)=A\mathbf{e}^{At}=\mathbf{e}^{At}A\end{aligned}$$

Notons au passage que A et $\mathbf{e}^{At}$ commutent.

Notons que la fonction $\mathbf{e}^{At}$ satisfait la propriété suivante

$$\mathbf{e}^{A(t-t_0)} \;=\; \varphi(t-t_0) := \varphi(t,t_0)$$

On aussi

$$x(t) \;=\; \varphi(t-t_0)x(t_0),\ \forall t \geq t_0$$

La fonction $\varphi(t,t_0)$ vérifie les propriétés suivantes

- $\varphi(t_0,t_0) = \mathbb{I}$
- $\varphi(t,t_0) = \varphi(t,t_1)\varphi(t_1,t_0)$ (transitivité)
- $\varphi(t_0,t) = \left(\varphi(t,t_0)\right)^{-1}$

de même on a

- $\left(\mathbf{e}^{At}\right)^{\top} = \mathbf{e}^{A^{\top}t}$
- d$et\left[\mathbf{e}^{At}\right] \neq 0$ pour A et t finis.

Notons aussi que

$$\varphi(-t) = \varphi^{-1}(t)$$

Solution de l'équation d'état

Revenons à la solution de l'équation d'état, notons que la transformée en s de l'état est donnée par

$$X(s) = \Phi(s)x(0^+) + \Phi(s)BU(s)$$

ce qui implique dans le domaine temporel

$$x(t) = \varphi(t)x(0^+) + \int_0^t \varphi(t-\tau)Bu(\tau)\mathsf{d}\tau$$

cette dernière équation constitue la solution de l'équation d'état pour les systèmes LTI.

Matrice de transfert

La sortie du système est donnée par

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ &= C\Phi(s)x(0^+) + (C\Phi(s)B + D)\,U(s) \end{aligned}$$

La matrice de transfert du système est alors donnée par

$$\Sigma(s) = C\Phi(s)B + D = C\left(s\mathbb{I} - A\right)^{-1}B + D$$

On notera

$$\Sigma := \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$\lim_{s\to\infty} \Sigma(s) = D$$

On dira alors que

- $\Sigma(s)$ est propre si D est fini
- $\Sigma(s)$ est strictement propre si $D = 0$

Rappelons aussi que les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice A.

Réalisation

Soit un quadruplet

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix}$$

si on procède au changement de variable

$$\bar{x}(t) = Tx(t)$$

alors le système dynamique $G(s)$ de représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Réalisation

sera transformé comme suit

$$\begin{aligned} T\dot{x}(t) &= TAT^{-1}Tx(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}Tx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Réalisation

ce qui signifie que

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \vdots & \bar{B} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{C} & \vdots & D \end{pmatrix}$$

est une autre représentation du même système.

Par conséquent la réalisation d'un système n'est donc pas unique.

Considérons la matrice de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

que l'on peut réécrire comme suit

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+3) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Réalisation

avec

$$\begin{aligned} d(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) \\ N_1(s) &= (s+3) \\ N_2(s) &= (s+1)(s+2) \end{aligned}$$

Posons

$$V_1(s) = \frac{1}{d(s)} U_1(s) \qquad V_2(s) = \frac{1}{d(s)} U_2(s)$$

avec $[U_1(s)\ U_2(s)]^\top$ qui désigne le vecteur de commande.

Réalisation

La sortie est donnée par

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

avec

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= N_1(s)V_1(s) \\ Y_2(s) &= N_2(s)V_2(s) \end{aligned}$$

Réalisation

d'où l'on déduit les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \dot{v}_1(t) + 3v_1(t) \\
y_2(t) &= v_2^{(2)}(t) + 3\dot{v}_2(t) + 2v_2(t) \\
u_1(t) &= v_1^{(3)}(t) + 6v_1^{(2)}(t) + 11\dot{v}_1(t) + 6v_1(t) \\
u_2(t) &= v_2^{(3)}(t) + 6v_2^{(2)}(t) + 11\dot{v}_2(t) + 6v_2(t)
\end{aligned}$$

En posant, pour $i = 1,\ 2$,

$$x_{1i} = v_i \qquad x_{2i} = \dot{v}_i \qquad x_{3i} = v_i^{(2)}$$

Réalisation

On obtient alors la réalisation suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Réalisation

Cette réalisation peux être transformée comme suit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -11 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -11 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}$$

Réalisation que l'on peut mettre sous la forme

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I} \\ -6\mathbb{I} & -11\mathbb{I} & -6\mathbb{I} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix} u$$

une forme qui est similaire au cas mono-entrée.

Notons que la matrice A du système est de dimension 6.

Réalisation

Reprenons le matrice de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

que l'on réécrit sous la forme

$$G(s) \; = \; \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}}{s+2} + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}{s+3}$$

Réalisation

et en posant

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et en remarquant que

$$G(s) = C \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} B$$

Réalisation

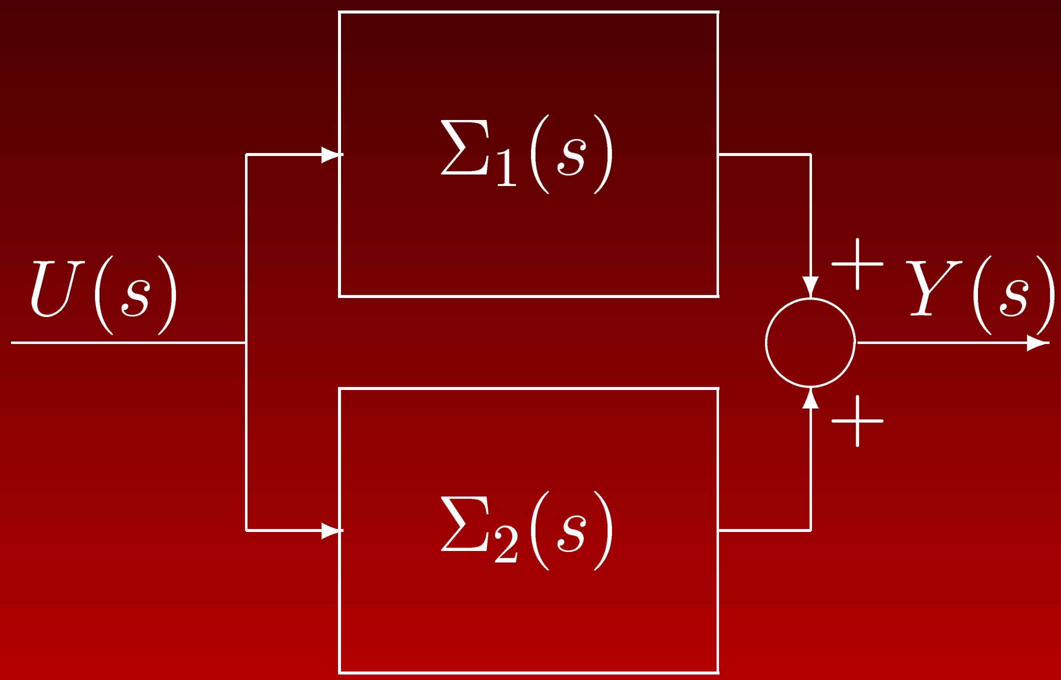
on déduit facilement que la matrice d'état A est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

et dans ce cas, la matrice d'état A est de dimension 3

Opérations sur les systèmes LTI : Addition

Considérons le système de la figure ci-dessous



On suppose que les sorties des deux systèmes Σ_1 et Σ_2 ont la même dimension.

Opérations sur les systèmes LTI : Addition (Suite)

En posant

$$\Sigma_1 \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ y_1(t) & = & C_1 x_1(t) + D_1 u(t) \end{array} \right.$$

et

$$\Sigma_2 \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_2(t) & = & A_2 x_2(t) + B_2 u(t) \\ y_2(t) & = & C_2 x_2(t) + D_2 u(t) \end{array} \right.$$

La sortie $y(t)$ est alors donnée par

$$\begin{array}{rcl} Y(s) & = & Y_1(s) + Y_2(s) \\ & = & \Sigma_1(s)U(s) + \Sigma_2(s)U(s) = (\Sigma_1(s) + \Sigma_2(s))\,U(s) \end{array}$$

Dans ce cas on a

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Opérations sur les systèmes LTI : Addition (Suite)

La sortie $y(t)$ peut s'écrire aussi comme suit

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + (D_1 + D_2)\, u(t)$$

et naturellement le vecteur

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

est le vecteur d'état du système Σ.

Opérations sur les systèmes LTI : Addition (Suite)

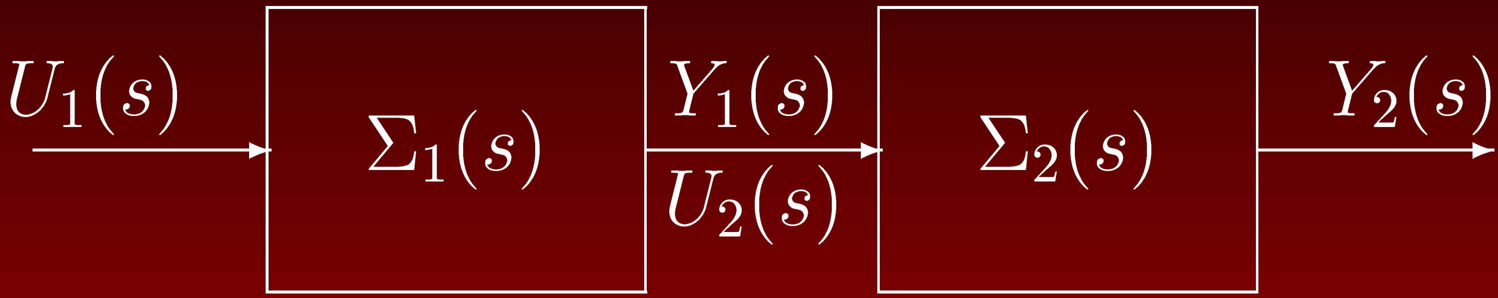
On déduit alors la représentation suivante

$$\Sigma \ : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} C_1(t) & C_2(t) \end{bmatrix} x(t) + (D_1 + D_2)\, u(t) \end{array} \right.$$

ou bien

$$\Sigma \ := \left(\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1(t) & C_2(t) \end{bmatrix} & (D_1 + D_2) \end{array} \right)$$

Considérons le système suivant



Nous avons alors

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_2(s) \\ &= \Sigma_2(s)U_2(s) = \Sigma_2(s)Y_1(s) \\ &= \Sigma_2(s)\Sigma_1(s)U_1(s) \\ &= \Sigma_2(s)\Sigma_1(s)U(s) \end{aligned}$$

Le transfert du système cascade est alors donné par

$$\Sigma(s) \;=\; \Sigma_2(s)\Sigma_1(s)$$

Rappelons que les représentations d'état de Σ_1 et Σ_2 sont données par

$$\Sigma_1 \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & A_1x_1(t) + B_1u_1(t) \\ y_1(t) & = & C_1x_1(t) + D_1u_1(t) \end{array} \right.$$

et

$$\Sigma_2 \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_2(t) & = & A_2x_2(t) + B_2u_2(t) \\ y_2(t) & = & C_2x_2(t) + D_2u_2(t) \end{array} \right.$$

or comme

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_2(s) \\ Y_1(s) &= U_2(s) \\ U_1(s) &= U(s) \end{aligned}$$

l'équation d'état du système Σ_2 devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 y_1(t) \\ &= A_2 x_2(t) + B_2 \left(C_1 x_1(t) + D_1 u(t)\right) \\ &= B_2 C_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + B_2 D_1 u(t) \end{aligned}$$

Opérations sur les systèmes LTI : Multiplication

La sortie $y(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= C_2x_2(t) + D_2y_1(t) \\ &= C_2x_2(t) + D_2\left(C_1x_1(t) + D_1u(t)\right) \\ &= D_2C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + D_2D_1u(t) \end{aligned}$$

En résumé le système Σ sera alors décrit par

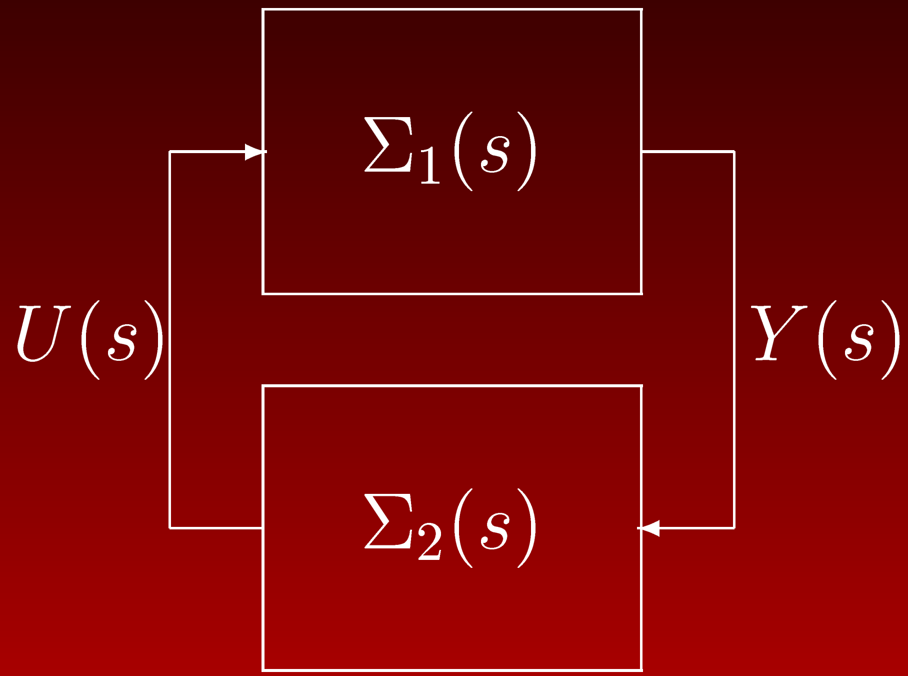
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1x_1(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= B_2C_1x_1(t) + A_2x_2(t) + B_2D_1u(t) \\ y(t) &= D_2C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + D_2D_1u(t) \end{aligned}$$

Et en d'autres termes,

$$\Sigma \; := \; \left(\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} & D_2D_1 \end{array} \right)$$

ce qui représente le produit de deux systèmes LTI.

Considérons le système suivant



Les représentations des deux systèmes sont

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\
y(t) &= C_1 x_1(t) + D_1 u(t)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 y(t) \\
u(t) &= C_2 x_2(t) + D_2 y(t)
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$
\begin{aligned}
u(t) &= C_2x_2(t) + D_2y(t) \\
&= C_2x_2(t) + D_2\left(C_1x_1(t) + D_1u(t)\right) \\
&= D_2C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + D_2D_1u(t)
\end{aligned}
$$

Si on suppose que

$$R = \mathbb{I} - D_2D_1$$

est inversible alors l'entrée sera donnée par

$$u(t) = R^{-1}D_2C_1x_1(t) + R^{-1}C_2x_2(t)$$

L'équation d'état du système est alors donnée par

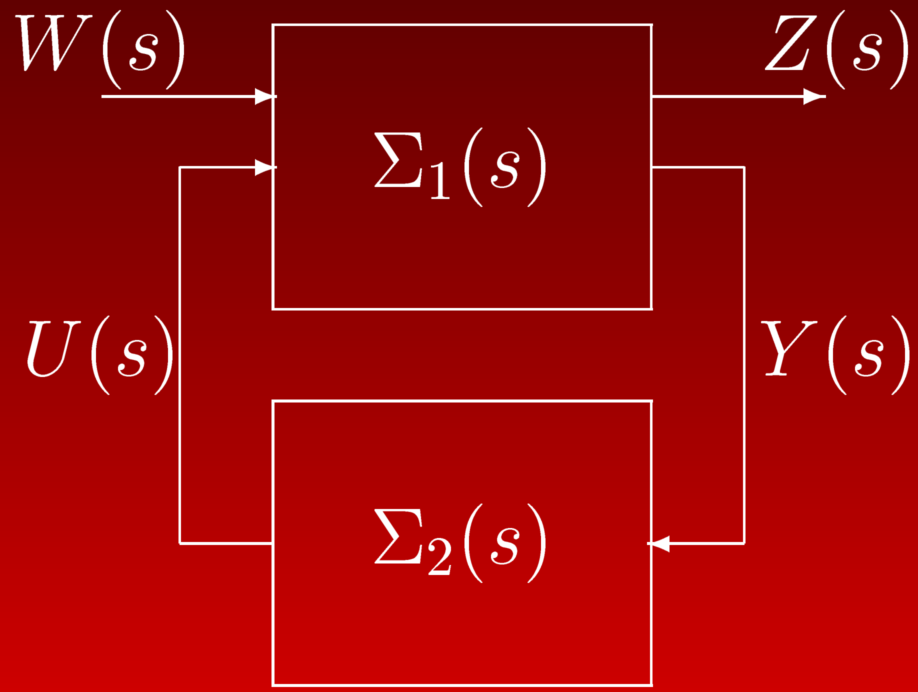
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \left(A_1 + B_1 R^{-1} D_2 C_1\right) x_1(t) \\
&\quad + B_1 R^{-1} C_2 x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) \\
&\quad + B_2 \left(C_1 x_1(t) + D_1 R^{-1} \left(D_2 C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)\right)\right)
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \left(A_1 + B_1R^{-1}D_2C_1\right)x_1(t) \\
&\quad +B_1R^{-1}C_2x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= B_2\left(C_1 + D_1R^{-1}D_2C_1\right)x_1(t) \\
&\quad +\left(A_2 + B_2D_1R^{-1}C_2\right)x_2(t)
\end{aligned}$$

équation qui décrit le comportement du système en boucle fermée.

Si on considère que le système bouclé possède une entrée exogène $w(t)$ et une sortie commandée $z(t)$ conformément au schéma bloc suivant



Le système a donc la représentation suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_1x_1(t) + B_1u(t) + B_ww(t)\\ y(t) &= C_1x_1(t) + D_1u(t) + D_{yw}w(t)\\ z(t) &= C_xx_1(t) + D_uu(t) + D_{zw}w(t)\end{aligned}$$

Avec les mêmes hypothèses que précédemment la commande a pour expression

$$\begin{aligned}u(t) = R^{-1}D_2C_1x_1(t)\\ +R^{-1}C_2x_2(t) + R^{-1}D_2D_{yw}w(t)\end{aligned}$$

Ainsi la dérivée de l'état $x_1(t)$ devient

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \left(A_1 + B_1 R^{-1} D_2 C_1\right) x_1(t) \\
&\quad + B_1 R^{-1} C_2 x_2(t) \\
&\quad + \left(B_w + B_1 R^{-1} D_2 D_{yw}\right) w(t)
\end{aligned}$$

et la dérivée de l'état $x_2(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2\left(C_1 x_1(t) + D_1 u(t) + D_{yw} w(t)\right)\\
&= B_2\left(\mathbb{I} + D_1 R^{-1} D_2\right) C_1 x_1(t)\\
&\quad + \left(A_2 + B_2 D_1 R^{-1} C_2\right) x_2(t)\\
&\quad + B_2\left(\mathbb{I} + D_1 R^{-1} D_2\right) D_{yw} w(t)
\end{aligned}$$

La sortie $z(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} z(t) = & \left(C_x + D_u R^{-1} D_2 C_1\right) x_1(t) \\ & + D_u R^{-1} C_2 x_2(t) \\ & + \left(D_{zw} + D_u R^{-1} D_2 D_{yw}\right) w(t) \end{aligned}$$

Opérations sur les systèmes LTI : Inverse

Considérons le système Σ décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Comme la relation entre $u(t)$ et $y(t)$ est donnée par

$$Y(s) = \Sigma U(s)$$

alors si on a

$$U(s) = \Sigma^{-1} Y(s)$$

si l'inverse de Σ existe.

Pour cela supposons que D^{-1} existe alors l'entrée est donnée par

$$u(t) \;=\; -D^{-1}Cx(t) + D^{-1}y(t)$$

ceci nous permet de réécrire l'équation d'état comme suit

$$\dot{x}(t) \;=\; \left(A - BD^{-1}C\right)x(t) + BD^{-1}y(t)$$

et finalement, si D^{-1} existe alors

$$\Sigma^{-1} := \left(\begin{array}{ccc} A - BD^{-1}C & \vdots & BD^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -D^{-1}C & \vdots & D^{-1} \end{array}\right)$$

Opérations sur les systèmes LTI : Transposé conjugué

Soit

$$\Sigma(s) := \begin{pmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ C & \vdots & D \end{pmatrix}$$

Le transposé conjugué est donné par

$$\Sigma^*(s) = \Sigma^\top(-s) := \begin{pmatrix} -A^\top & \vdots & C^\top \\ \dots & \dots & \dots \\ -B^\top & \vdots & D^\top \end{pmatrix}$$

Commandabilité des système LTI

Un système linéaire invariant dans le temps est commandable si pour tout état initial $x(0)$ et tout instant $t_1 > 0$, il existe une commande $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, permettant de ramener l'état à l'origine, *i.e.* $x(t_1) = 0$.

Commandabilité des système LTI : caractérisation

Les propriétés suivantes sont équivalents

(i) La paire (A, B) est commandable,

(ii) rang $\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} = n,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) La paire (A, B) n'est similaire à aucune paire de la forme

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

(iv) rang $\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

(v) si $\xi^\top (sI - A)^{-1} B = 0,\ \forall s$ alors $\xi = 0$

(vi) si $\xi^\top \mathbf{e}^{At} B = 0$, pour $0 \le t \le t_1$ où $t_1 > 0$ est arbitraire alors $\xi = 0$.

Caractérisation : (i) $\rightarrow$ (ii)

Supposons que le système soit commandable et que la propriété **(i)** soit fausse, autrement dit

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \ : \ \mathsf{rang} \left[\begin{array}{cc} \lambda I - A & B \end{array} \right] < n$$

Ceci implique que les lignes de la matrice $\left[\begin{array}{cc} \lambda I - A & B \end{array} \right]$ sont linéairement dépendants et par conséquent il existe un vecteur $\xi \neq 0$ tel que

$$\xi^\top \left[\begin{array}{cc} \lambda I - A & B \end{array} \right] = 0$$

autrement dit

$$\xi^\top (\lambda I - A) = 0 \qquad\qquad \xi^\top B = 0$$

Reprenons l'équation d'état du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

et compte tenu de la propriété vérifiée par le vecteur ξ nous avons

$$\begin{aligned} \xi^\top \dot{x}(t) &= \xi^\top A x(t) + \xi^\top B u(t) \\ &= \lambda \xi^\top x(t) \end{aligned}$$

Caractérisation : (i) $\rightarrow$ (ii) (Suite)

cala veut dire que le scalaire $\xi^\top x(t)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre et dont la solution est

$$\xi^\top x(t) = \mathbf{e}^{\lambda t}\xi^\top x(0)$$

ainsi l'évolution du vecteur d'état est indépendante de toute entrée ce qui contredit le fait que le système soit commandable et par conséquent la propriété **(ii)** est vérifiée.

Comme précédemment supposons que la propriété **(iii)** soit fausse, c'est à dire qu'il existe une matrice non singulière T telle que

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \qquad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si maintenant on considère un scalaire λ et un vecteur ξ_2 vérifiant

$$\xi_2^\top A_2 = \lambda \xi_2^\top$$

ou bien en d'autres termes, le vecteur ξ_2 est un vecteur propre de $A_2^\top$ associé à la valeur propre λ.

Caractérisation : (ii) $\rightarrow$ (iii) (Suite)

Posons

$$\xi^\top = \left[\begin{array}{cc} 0 & \xi_2^\top \end{array}\right] T$$

alors il vient :

$$\begin{aligned}
\xi^\top \left[\begin{array}{cc} \lambda I - A & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{array}\right] \\
= \left[\begin{array}{cc} 0 & \xi_2^\top \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \lambda I - A_1 & -A_{12} & B_1 \\ 0 & \lambda I - A_2 & 0 \end{array}\right] = 0
\end{aligned}$$

et ceci contredit la propriété **(ii)** donc **(iii)** est vraie.

Caractérisation : (iii) $\rightarrow$ (iv)

Comme précédemment supposons que la propriété **(iv)** soit fausse, c'est à dire qu'il existe un vecteur ξ tel que

$$\xi^\top \left[\; B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B \; \right] = 0$$

ainsi on a

$$\xi^\top A^{i-1} B = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Les n vecteurs $\xi^\top A^{i-1}$ sont donc nécessairement dépendants et par conséquent il existe un entier $k \geq 1$ tel que les vecteurs

$$\xi^\top, \, \xi^\top A, \, \ldots, \, \xi^\top A^{k-1}$$

sont linéairements indépendants.

Par ailleurs, on peut trouver des scalaires $\alpha_i,\ i = 0,\ \ldots,\ k-1$, tels que l'on peut écrire

$$\xi^\top A^k = \alpha_0 \xi^\top \ +\ \alpha_1 \xi^\top A \ +\ \ldots\ +\ \alpha_{k-1} \xi^\top A^{k-1}$$

Posons alors

$$T_2 = \begin{bmatrix} \xi^\top \\ \xi^\top A \\ \ldots \\ \xi^\top A^{k-1} \end{bmatrix}$$

ceci nous permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
T_2 A &= \begin{bmatrix} \xi^\top A \\ \xi^\top A^2 \\ \dots \\ \xi^\top A^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^\top \\ \xi^\top A \\ \dots \\ \xi^\top A^{k-1} \end{bmatrix} \\
&= A_2 \, T_2
\end{aligned}
$$

Caractérisation : (iii) $\rightarrow$ (iv) (Suite)

Soit T_1 choisie telle que la matrice $T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ soit non singulière.
Notons que la matrice T ainsi définie vérifie

$$TB = \begin{bmatrix} T_1 B \\ 0 \end{bmatrix} \qquad TA = \begin{bmatrix} T_1 A \\ T_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T$$

où nous avons posé

$$T_1 A T^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \end{bmatrix}$$

et ceci contredit la propriété **(iii)** et donc la propriété **(iv)** est nécessairement vraie.

Supposons que **(v)** soit fausse alors il existe un $\xi \neq 0$ tel que

$$\xi^\top (sI - A)^{-1} B = 0, \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$

Remarquons que $(sI - A)^{-1}$ peut s'écrire comme suit

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1} s^{-i}$$

d'où

$$\xi^\top (sI - A)^{-1} B = \sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} \xi^\top A^{i-1} B = 0$$

Caractérisation : (iv) $\rightarrow$ (v) (Suite)

Ceci implique nécessairement que

$$\xi^\top A^i B = 0,\ \forall i$$

ce qui contredit la propriété **(iv)** et par conséquent **(v)** est vraie.

Supposons qu'il existe un $t_1 > 0$ et pour $0 \leq t \leq t_1$ on a

$$\xi^\top \mathbf{e}^{At} B \equiv 0$$

on a donc nécessairement

$$\frac{\mathsf{d}^\mathsf{k}}{\mathsf{d}t^k} \left[\xi^\top \mathbf{e}^{At} B\right]_{t=0} = \xi^\top A^k B = 0, \qquad \forall k$$

ce qui nous permet d'écrire, pout tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} s^{-i} \xi^\top A^{i-1} B = \xi^\top (sI - A)^{-1} B = 0$$

et compte tenu de la propriété **(v)**, ceci implique nécessairement que $\xi = 0$ et donc la propriété **(vi)** est satisfaite.

Caractérisation : (vi) $\to$ (i)

Supposons que la propriété **(vi)** soit vérifiée, alors $\forall \xi \neq 0$ et pour tout $t_1 > 0$ on a

$$\exists t \in [0 \;\; t_1] : \xi^\top \mathbf{e}^{-At} B \neq 0,$$

En effet, si $\xi^\top \mathbf{e}^{-At} B = 0$ sur l'intervalle $[0 \;\; t_1]$, en prenant les dérivées successives à $t = 0$ on contredit la la propriété **(vi)**. Autrement dit, on a

$$\int_0^{t_1} \xi^\top \mathbf{e}^{-At} B B^\top \mathbf{e}^{-A^\top t} \xi \mathsf{d}t \neq 0,$$

et comme l'expression précédente est satisfaite pour tout vecteur $\xi \neq 0$ alors nécessairement la matrice

$$M(t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{e}^{-At} B B^\top \mathbf{e}^{-A^\top t} \mathsf{d}t$$

est non singulière.
Par ailleurs, la commande

$$u(t) = -B^\top \mathbf{e}^{-A^\top t} M^{-1}(t_1) x(0)$$

nous permet de passer de l'état $x(0)$ à l'état

$$x(t_1) = \mathbf{e}^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} \mathbf{e}^{A(t-t_1)} B u(t) \mathsf{d}t$$

Caractérisation : (vi) $\to$ (i) (Suite)

En substituant l'expression de la commande $u(t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= \mathbf{e}^{At_1}x(0) - \int_0^{t_1} \mathbf{e}^{A(t_1-t)}BB^\top \mathbf{e}^{-A^\top t}M^{-1}(t_1)x(0)\mathsf{d}t \\
&= \mathbf{e}^{At_1}x(0) - \mathbf{e}^{At_1}\left(\int_0^{t_1} \mathbf{e}^{-At}BB^\top \mathbf{e}^{-A^\top t}\mathsf{d}t\right)M^{-1}(t_1)x(0) \\
&= \mathbf{e}^{At_1}\left(I - \left(\int_0^{t_1} \mathbf{e}^{-At}BB^\top \mathbf{e}^{-A^\top t}\mathsf{d}t\right)M^{-1}(t_1)\right)x(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ceci signifie que cette commande permet de ramener, en un temps fini, le système de l'état initial $x(0)$ à l'origine. Autrement dit, le système est bien commandable.

Commandabilité des système LTI

L'équivalence entre les différentes propriétés est ainsi établie.

Une notion duale à la commandabilité étant l'observabilité et on dira que la paire (A, C) est observable si la paire $(A^\top, C^\top)$ est commandable.

Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

On dira que le système est observable ou bien la paire (A, C) est observable, si l'ensemble $\{y(t), 0 \leq t \leq t_1\}$ pour t_1 arbitraire permet de déterminer d'une manière unique l'état initial $x(0)$.

Observabilité des systèmes LTI : Caractérisation

Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) La paire (A, C) est observable,

(ii) rang $\begin{bmatrix} \lambda I - A^\top & C^\top \end{bmatrix}^\top = n, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) La paire (A, C) n'est similaire à aucune paire de la forme

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

(iv) rang $\begin{bmatrix} C^\top & (CA)^\top & \dots & (CA^{n-1})^\top \end{bmatrix}^\top = n$

(v) si $C\,(sI - A)^{-1}\xi = 0, \ \forall s$ alors $\xi = 0$

(vi) si $C\mathrm{e}^{At}\xi = 0$, pour $0 \leq t \leq t_1$ où $t_1 > 0$ est arbitraire alors $\xi = 0$.

La stabilisabilité est une notion moins forte que la commandabilité. Elle permet d'accepter des modes non commandables à condition qu'ils soient stables.

Détectabilité des systèmes LTI

La détectabilité est une notion moins forte que l'observabilité. Elle permet d'accepter des modes non observables à condition qu'ils soient stables.

Réalisation minimale

Une réalisation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est dite minimale si la paire (A, B) est commandable et la paire (A, C) est observable.

Un résultat important en théorie des systèmes linéaires s'énonce comme suit

Deux réalisations minimales correspondent au même transfert si elles sont similaires.

Réalisation minimale

Soient deux représentations minimales

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

d'un système Σ et soient les matrices de commandabilité et d'observabilité associées :

$$\mathcal{M}_i = \left[\; B_i \;\; A_i B_i \;\; \ldots \;\; A_i^{n-1} B_i \;\right]$$
$$\mathcal{W}_i = \left[\; C_i^\top \;\; (C_i A_i)^\top \;\; \ldots \;\; (C_i A_i^{n-1})^\top \;\right]^\top$$

pour $i = 1, 2$

Réalisation minimale

Si les deux représentations correspondent au même transfert, alors on a

$$D_1 + C_1 \left(sI - A_1\right)^{-1} B_1 = D_2 + C_2 \left(sI - A_2\right)^{-1} B_2$$

et ceci pour tout $s \in \mathbb{C}$. Par conséquent on a nécessairement

$$D_1 = D_2, \qquad C_1 A_1^k B_1 = C_2 A_2^k B_2 \qquad \forall k$$

Or les composantes de la matrice $\mathcal{W}_1 \mathcal{M}_1$ sont de la forme $C_1 A_1^k B_1$ de même pour $\mathcal{W}_2 \mathcal{M}_2$ et donc on a

$$\mathcal{W}_1 A_1^k \mathcal{M}_1 = \mathcal{W}_2 A_2^k \mathcal{M}_2, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Comme les réalisations sont commandable et observable alors on a

$$\mathcal{M}_1 = \left(\mathcal{W}_1^\top \mathcal{W}_1\right)^{-1} \mathcal{W}_1^\top \mathcal{W}_2 \mathcal{M}_2 = T_2 \mathcal{M}_2$$

et

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^\top \left(\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^\top\right)^{-1} = \mathcal{W}_2 T_1$$

autrement dit

$$\mathcal{W}_1 \mathcal{M}_1 = \mathcal{W}_2 T_1 T_2 \mathcal{M}_2 = \mathcal{W}_2 \mathcal{M}_2$$

et par conséquent

$$T_1 T_2 = I$$

Réalisation minimale

Tenant compte de ces résultats on déduit facilement que

$$B_1 = T_2 B_2 \qquad\qquad C_1 = C_2 T_1$$

et comme

$$\mathcal{W}_1 A_1^k \mathcal{M}_1 = \mathcal{W}_2 A_2^k \mathcal{M}_2, \qquad\qquad k \in \mathbb{N}$$

alors on a

$$\mathcal{W}_1 A_1 \mathcal{M}_1 = \mathcal{W}_2 A_2 \mathcal{M}_2 = \mathcal{W}_1 T_1^{-1} A_2 T_1 \mathcal{M}_1$$

ce qui nous donne

$$A_1 = T_1^{-1} A_2 T_1$$

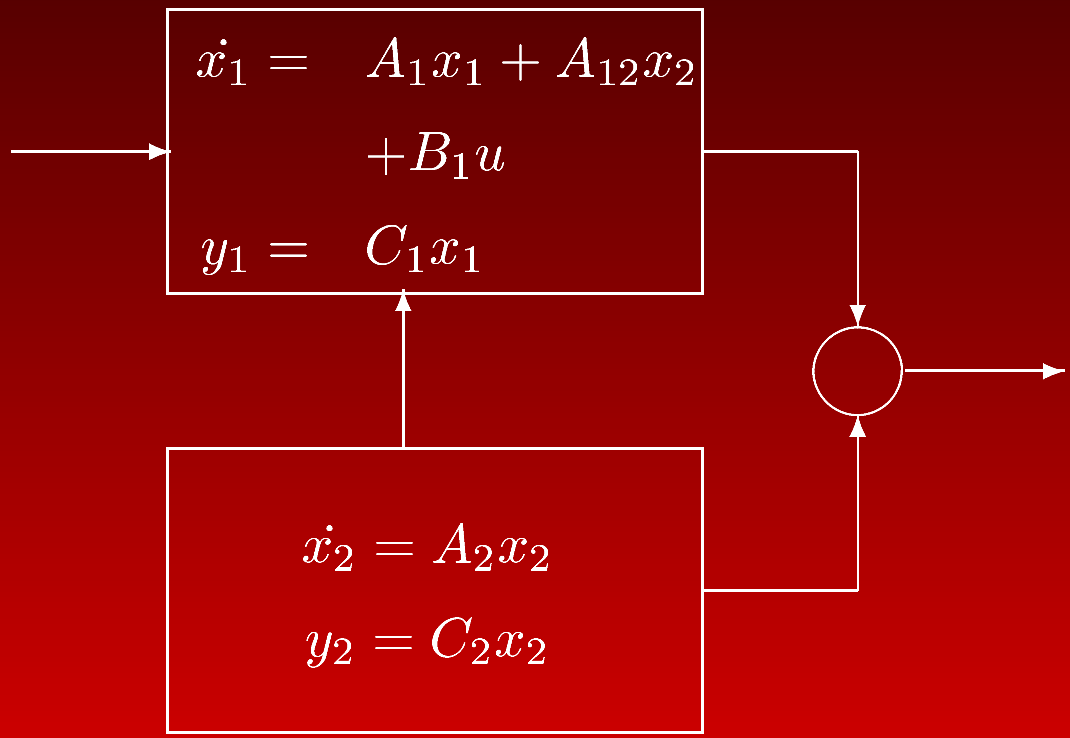
et ainsi la matrice de similarité n'est autre que $T = T_1$.

Réalisation minimale

Nous avons montré dans ce qui précède que deux réalisations minimales correspondant à un même transfert sont nécessairement similaires et la matrice de similarité est fonction des matrices de commandabilité et d'observabilité.

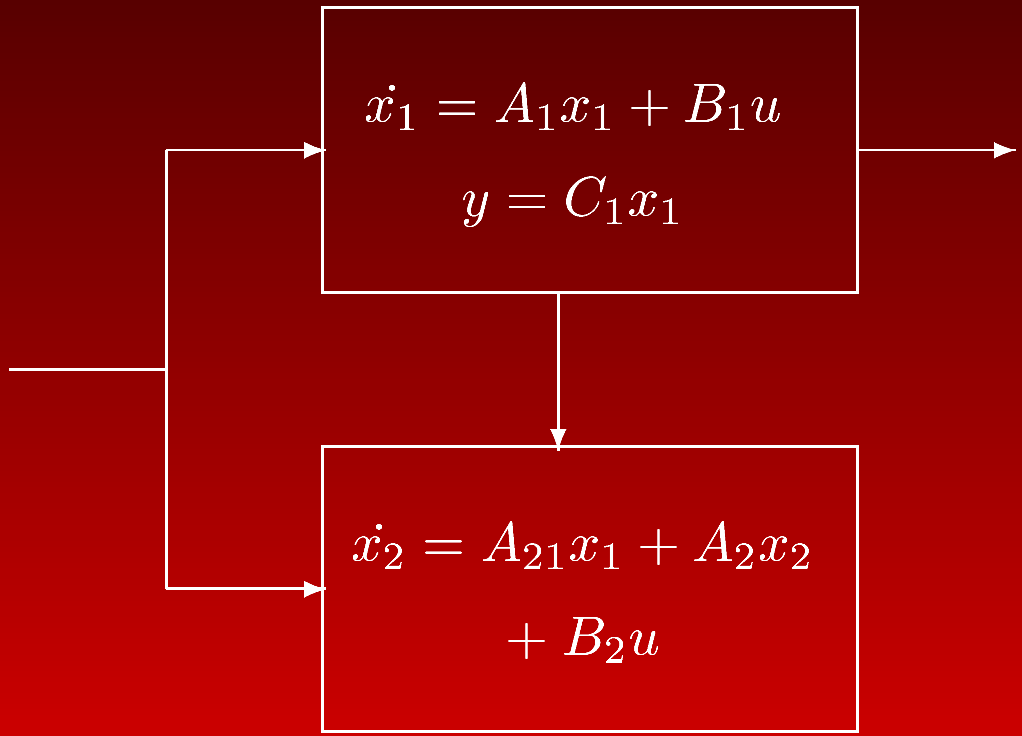
Décomposition selon la Commandabilité

Le système suivant comporte une partie commandable et une autre non commandable.



Décomposition selon l'Observabilité

Le système suivant comporte une partie observable et une autre non observable.



Décomposition canonique

De ce qui précède nous pouvons donc décomposer l'espace d'état en quatre sous espaces :

- L'espace des états commandables et non observables,
- L'espace des états commandables et observables,
- L'espace des états non commandables et non observables,
- L'espace des états non commandables et observables,

Décomposition canonique

Nous allons tout d'abord caractériser l'ensemble des états commandables.
Supposons que l'état initial soit à l'origine, *i.e.* $x(0) = 0$, alors un état commandable est donné par

$$x = \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\mathsf{d}\tau$$

En remarquant que $\mathbf{e}^{A(t-\tau)}$ peut en fait s'écrire comme suit

$$\mathbf{e}^{A(t-\tau)} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t-\tau)A^{i-1}$$

Décomposition canonique

ce qui nous permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \psi_i(t-\tau) A^{i-1} B u(\tau) \mathsf{d}\tau \\
&= \sum_{i=1}^{n} A^{i-1} B \left(\int_0^t \psi_i(t-\tau) u(\tau) \mathsf{d}\tau \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} A^{i-1} B \xi_i \\
&= \mathcal{M} \xi
\end{aligned}
$$

Autrement dit

$$x \in \mathsf{Im}\mathcal{M}$$

ou encore que le sous espace $\mathsf{Im}\mathcal{M}$ n'est autre que le sous espace des états commandables.
Par dualité le sous espace $\mathsf{Im}\mathcal{W}^\top$ sera le sous espace des états observables.
Par consequent

$$R_a = \mathsf{Im}\mathcal{M} \cap \mathsf{Ker}\mathcal{W}$$

est le sous espace des états commandables et non observables

Décomposition canonique

L'espace est alors décomposé comme suit

R_a **:** L'espace des états commandables et non observables,

R_b **:** L'espace des états commandables et observables,

R_c **:** L'espace des états non commandables et non observables,

R_d **:** L'espace des états non commandables et observables,

Décomposition canonique

et ainsi la matrice A du système est décomposée comme suit

$$AT = T \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} \\ 0 & A_{bb} & 0 & A_{bd} \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} \end{bmatrix}$$

de même pour les matrices B et C on a

$$B^\top = \begin{bmatrix} B_a^\top & B_b^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top T^\top$$

et

$$CT = \begin{bmatrix} 0 & C_b & 0 & C_d \end{bmatrix}$$

Décomposition canonique

Remarquons que seule la partie commandable et observable est présente dans le transfert, en effet on a

$$\left[\begin{array}{cccccc} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} & \vdots & B_a \\ 0 & A_{bb} & 0 & A_{bd} & \vdots & B_a \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & C_b & 0 & C_d & \vdots & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} A_{bb} & \vdots & B_b \\ \dots & \dots & \dots \\ C_b & \vdots & D \end{array}\right]$$

Placement de pôles par retour d'état

Soit l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

si la commande $u(t)$ est prise de la forme

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

alors le système ainsi commandé devient

$$\dot{x}(t) = (A + BK)\,x(t) + Bv(t)$$

où $v(t)$ est la nouvelle entrée et la matrice $(A + BK)$ la nouvelle matrice d'état. Les pôles peuvent être ainsi modifiés par un retour d'état.

On dira qu'il est possible de placer totalement le spectre de la matrice A par retour d'état si pour tout ensemble $\Lambda = \bar{\Lambda} = \{\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ \ldots, \ n\}$ il existe un gain K tel que le spectre de la matrice $A+BK$, noté $\sigma\left(A + BK\right)$, n'est autre que l'ensemble Λ.

Un important résultat dans la théorie des systèmes linéaires est le suivant :

Les deux propositions sont équivalentes :

- $\forall \Lambda = \bar{\Lambda} = \{\lambda_i \in \mathbb{C}\}, \exists K \ : \ \sigma\left(A + BK\right) = \Lambda,$
- Le système est commandable.

$\Lambda = \bar{\Lambda}$ signifie que l'ensemble Λ est symétrique c'est à dire que si $\lambda \in \Lambda$ alors $\bar{\lambda} \in \Lambda$

Tout d'abord remarquons que :
Pour tout $b \in \mathsf{Im}B$, si la paire (A, B) est commandable alors il existe un gain K tel que $(A + BK, b)$ est commandable.

Compte tenu de cette propriété, posons $b = Bu$ pour $u \in \mathbb{R}^m$ donc il existe un K_1 tel que la paire $(A+BK_1, b)$ soit commandable.
Comme la paire (A_1, b) est commandable avec $A_1 = A + BK_1$ alors on peut trouver une transformation de similarité telle que la paire (A_1, b) soit similaire à la paire $(\bar{A}_1, \bar{b})$

Placement de pôles par retour d'état

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et donc le polynôme caractéristique de la matrice A_1 est

$$\lambda^n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda^{i-1} \right)$$

En posant

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \hat{\alpha}_i \lambda^{i-1} \right)$$

et en choisissant

$$\bar{f} = \left[\ (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) \ \ (\hat{\alpha}_2 - \alpha_2) \ \ \ldots \ \ (\hat{\alpha}_n - \alpha_n) \ \right]$$

on remarque alors que le polynôme caractéristique de $\bar{A}_1 + \bar{b}\bar{f}$ n'est autre que $P(\lambda)$.

Par conséquent $P(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A_1 + bf$ et donc le gain f permet d'assigner l'ensemble Λ à la paire (A_1, b), autrement dit

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sigma\left(A_1 + bf\right) \\
&= \sigma\left(A + BK_1 + bf\right) \\
&= \sigma\left(A + BK_1 + Buf\right) \\
&= \sigma\left(A + BK\right)
\end{aligned}$$

où $K = K_1 + uf$ est le gain de retour d'état qui permet d'effectuer ce placement de pôles.

Inversement si on suppose que la paire (A, B) n'est pas commandable alors :

$$\exists \lambda \ : \ \mathsf{rang} \left[\begin{array}{cc} \lambda I - A & B \end{array} \right] < n$$

et donc on peut trouver un vecteur $\xi \neq 0$ tel que

$$\xi^\top (\lambda I - A) = 0 \qquad\qquad \xi^\top B = 0$$

Ceci implique que $\forall K$ on a

$$\xi^\top (\lambda I - (A + BK)) = 0$$

c'est à dire que λ est valeur propre de $(A + BK)$ quelle que soit la matrice K et donc on ne peut pas assigner d'autres pôles à la paire (A, B).

On dira que la paire (A, B) est stabilisable si il existe un gain K tel que la matrice $A + BK$ soit stable.

De même la paire (A, C) est détectable si il existe un gain L tel que la matrice $A + LC$ soit stable.

Remarquons que la matrice $A + LC$ s'obtient comme suit :
A partir du système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

et en injectant la sortie

$$\dot{x} \;=\; Ax + Ly = (A + LC)x$$

on obtient le système dont la matrice d'état n'est autre que la matrice $A + LC$.
Cette opération est duale au retour d'état.

Zéros du système

Les zéros (de transmission) d'un système linéaire sont définis comme étant les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathsf{rang} \begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & D \end{bmatrix} < n + \mathsf{min}(m, p)$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} \mathsf{rang} \begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \mathsf{rang} \left(\begin{bmatrix} I & L \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathsf{rang} \left(\begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

et ceci implique l'invariance des zéros par retour d'état et par injection de sortie.

Obeservateur de Luenberger

Un observateur est un système dynamique ayant pour entrées les signaux $(u(t), y(t))$ et dont la sortie est une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ telle que

$$\lim_{t \to \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$$

pour toute valeur initiale de l'état et pour tout entrée $u(t)$.
Si la paire (A, C) est détectable alors un observateur de Luenberger de même dimension que le système est donnée par

$$\dot{\hat{x}}(t) \;=\; A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\left(C\hat{x}(t) + Du(t) - y(t)\right)$$

Le gain L, appelé gain de l'observateur, est choisi de manière à assurer la stabilité de la matrice $(A + LC)$.

Un correcteur basé observateur est donné alors par

$$\begin{array}{rcl}\dot{\hat{x}}(t) & = & A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\left(C\hat{x}(t) + Du(t) - y(t)\right) \\ u(t) & = & K\hat{x}(t)\end{array}$$

et le gain F, appelé gain du correcteur, est choisi de manière à assurer la stabilité de la matrice $A + BF$.
Le correcteur est alors donné par

$$U(s) = K(s)Y(s)$$

avec

$$K(s) = \left[\begin{array}{ccc} A + BF + LC + LDF & \vdots & -L \\ \dots & \dots & \dots \\ F & \vdots & 0 \end{array}\right]$$

Stabilité

La stabilité est une condition primordiale pour un système. Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) : A est stable (asymptotiquement)

(ii) : $\exists a > 0,\ \exists M > 0\ :\ \|\mathbf{e}^{At}\| \leq M\mathbf{e}^{-at}$

(iii) : $\forall Q = Q^\top > 0,\ \exists P = P^\top > 0\ :\ PA + A^\top P = -Q$

Stabilité (i) $\rightarrow$ (ii)

Comme A est stable asymptotiquement alors

$$\mathsf{Re}(\lambda[A]) \; < \; 0$$

et par conséquent $\exists a > 0$ tel que

$$\mathsf{Re}(\lambda[A]) \; < \; -a < 0$$

autrement dit

$$\mathsf{Re}(\lambda[aI + A]) \; < \; 0$$

ou encore qu'il existe un $M > 0$ tel que

$$||\mathbf{e}^{(aI+A)t}|| < M$$

et ainsi la propriété **(ii)** est établie.

Stabilité (ii) $\rightarrow$ (iii)

Dans ce cas, pour toute matrice $Q = Q^\top > 0$ posons

$$P = \int_0^\infty \mathbf{e}^{A^\top t} Q \mathbf{e}^{At} \mathsf{d}t$$

alors on a

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\mathbf{e}^{A^\top t} Q \mathbf{e}^{At}\right) \;=\; \left(\mathbf{e}^{A^\top t} Q \mathbf{e}^{At}\right) A + A^\top \left(\mathbf{e}^{A^\top t} Q \mathbf{e}^{At}\right)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\mathbf{e}^{A^\top t} Q \mathbf{e}^{At}\right)\mathsf{d}t &= PA + A^\top P \\ &= \left[\mathbf{e}^{A^\top t} Q \mathbf{e}^{At}\right]_0^\infty = -Q\end{aligned}$$

et ceci établit la propriété **(iii)**.

Stabilité (iii) $\rightarrow$ (i)

Si la propriété **(iii)** est vraie alors pour tout vecteur propre ξ de A, associé à la valeur propre λ, on a

$$\begin{aligned} \xi^\top \left(PA + A^\top P\right) \xi &= \left(\lambda + \bar{\lambda}\right) \xi^\top P \xi \\ &= -\xi^\top Q \xi \end{aligned}$$

et comme $Q > 0$ et $P > 0$ alors on a nécessairement

$$\lambda + \bar{\lambda} = \mathsf{Re}\left(\lambda\right) < 0$$

ce qui établit la stabilité de la matrice A.

Remarquons que dans le cas où la matrice Q est écrite sous la forme

$$Q = C^\top C$$

L'équation de Lyapunov, pour $P > 0$, s'écrit comme suit

$$PA + A^\top P = -C^\top C$$

et dans ce cas la matrice A est asymptotiquement stable si et seulement si la paire (A, C) est observable.

Stabilité (iii) $\to$ (i)

Autrement dit nous avons les résultats suivant

Les deux propositions sont équivalentes

- $\exists P > 0 \ : \ PA + A^\top P = -C^\top C$
- La paire (A, C) est observable.

Par dualité nous avons
Les deux propositions sont équivalentes

- $\exists X > 0 \ : \ AX + XA^\top = -BB^\top$
- La paire (A, B) est commandable.

Une fonction $\varphi(\cdot)\ :\ \mathbb{R}^+\ \rightarrow\ \mathbb{R}^n$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si

- φ est continue sur $\mathbb{R}^+$,
- φ est monotone croissante,
- $\varphi(0) = 0$

Une fonction $\varphi(\cdot)\ :\ \mathbb{R}^+\ \rightarrow\ \mathbb{R}^n$ est dite de classe $\mathcal{L}$ si

- φ est continue sur $\mathbb{R}^+$,
- φ est monotone décroissante,
- $\varphi(0) > 0$
- $\lim\limits_{r\rightarrow\infty} \varphi(0) = 0$

Une fonction

$$V \ : \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

est dite localement définie positive si

- V est continue,
- $V(t, 0) = 0, \ \forall t \geq 0,$
- $\exists r > 0$, $\exists \alpha(\cdot)$, de classe $\mathcal{K}$ et $\beta(\cdot)$ de classe $\mathcal{L}$:

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \beta(\|x\|)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{B}_r.$

L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre stable pour le système si il existe une fonction localement définie positive de classe $\mathcal{C}^1$

$$V \;:\; \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \;\rightarrow\; \mathbb{R}$$

et une constante $r > 0$ telle que

$$\dot{V}(t,x) \;\leq\; 0, \qquad\qquad \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{B}_r$$

où $\dot{V}$ est évaluée le long de la trajectoire du système.

Une norme est une fonction de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{R}^+$ ayant les propriétés suivantes :
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$,
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$,

Certaines normes vérifient la propriété suivante

$$f(xy) \leq f(x) f(y)$$

La norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est l'une des normes les plus utilisées. On distingue en particulier

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

La norme matricielle (norme induite) est donnée par

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

En particulier pour $A \in \mathbb{X}^{m\mathrm{x}n}$

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \text{ (somme selon les colonnes)} \\
\|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{max}\left(A^* A\right)} \\
\|A\|_\infty &= \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ (somme selon les lignes)}
\end{aligned}$$

La norme euclidienne possède quelques propriétés intéressantes, à savoir : Pour $x \in \mathbb{X}^n$, $y \in \mathbb{X}^m$,

1. Si $n \geq m$, alors $\|x\| = \|y\|$ si et seulement si il existe une matrice $U \in \mathbb{X}^{n\mathrm{x}m}$ telle que $x = Uy$ et $U^*U = I$.

2. Si $n = m$, alors $|x^*y| \leq \|x\|\|y\|$. En outre $|x^*y| = \|x\|\|y\|$ si et seulement si $x = \alpha y$ pour un $\alpha \in X$ ou bien $y = 0$.

3. $\|x\| \leq \|y\|$ si et seulement si il existe une matrice $U \in \mathbb{X}^{n\mathrm{x}m}$ vérifiant $\|U\| \leq 1$ telle que $x = Uy$. En outre $\|x\| < \|y\|$ si et seulement si $\|U\| < 1$.

4. $\|Ux\| = \|x\|$ pour toute matrice unitaire (normale) U $(U^*U = UU^* = I)$.

La norme de Frobenius est définie par

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathsf{Trace}\,(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

Valeurs singulières

Pour $A \in \mathbb{X}^{nxm}$, il existe deux matrices unitaires $U \in \mathbb{X}^{mxm}$ et $V \in \mathbb{X}^{nxn}$ telles que

$$A = U\Sigma V = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V$$

avec

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

et

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r,\ r = min(m, n)$$

Valeurs singulières

Valeur singulière maximale

$$\bar{\sigma}\left(A\right) = \sigma_{max}\left(A\right) = \sigma_1$$

Valeur singulière minimale

$$\underline{\sigma}\left(A\right) = \sigma_{min}\left(A\right) = \sigma_r$$

$\bar{\sigma}\left(A\right)$ et $\underline{\sigma}\left(A\right)$ peuvent être définies comme suit

$$\bar{\sigma}\left(A\right) = \max_{x=1} \left\|Ax\right\|$$

$$\underline{\sigma}\left(A\right) = \min_{x=1} \left\|Ax\right\|$$

Valeurs singulières

Notons aussi que pour $A \in \mathbb{X}^{m\mathrm{x}n}$ telle que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0,\ r \leq min(m,n)$$

1. $\text{rang}\,(A) = r$,
2. $\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_r^2$,
3. $\|A\| = \sigma_1$

Normes : Signaux et systèmes

Pour un signal $f(t) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$, la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est largement utilisée et en particulier les normes

- $\|f\|_1 = \int_0^\infty \|f(t)\| \mathrm{d}t,$
- $\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$

où $\|f(t)\|$ est une norme dans $\mathbb{R}^n$ ou bien $\mathbb{C}^n$.

Les signaux dont la p-norme est finie constituent un ensemble noté L_p :

$$\mathsf{L}_p = \{f(t) \ : \ \|f\|_p < \infty\}$$

et tout signal $f(t) \in \mathsf{L}_p$ satisfait la condition

$$\lim_{t\to\infty} \|f(t)\| = 0$$

On définit aussi

$$\mathsf{L}_p^+ = \{f(t) \ : \ \forall t < 0, \ f(t) = 0; \|f\|_p < \infty\}$$

Soulignons aussi que

$$\|f\|_2 = (< f(t), f(t) >)^{\frac{1}{2}}$$

où le produit scalaire est défini comme suit

$$< f(t), g(t) >= \int_0^\infty f^*(t)g(t)\mathrm{d}t$$

ainsi l'espace L_2 est un espace muni d'un produit scalaire.
Pour $f(t) \in \mathsf{L}_2^+$ la transformée en s de $f(t)$ est donnée par

$$f(s) = \int_0^\infty f(t)\mathbf{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Ainsi pour $s = \sigma + j\omega$ et $\sigma > 0$ on a

$$|f(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t$$

ce qui implique que $f(s)$ est analytique dans le demi plan droit ouvert du plan complexe (ORHP). Ce qui nous permet de définir l'ensemble suivant

$$\mathsf{H}_p = \{f(s) \text{ analytique dans ORHP}, f(j\omega) \in \mathsf{L}_p\}$$

En particulier, l'ensemble

$$\mathsf{H}_\infty = \{f(s) \text{ analytique dans ORHP}, f(j\omega) \in \mathsf{L}_\infty\}$$

En particulier on a

- RL_2 est l'ensemble des transferts à coefficients réels strictement propres, stables et sans pôles sur l'axe imaginaire.
- RL_∞ est l'ensemble des transferts à coefficients réels propres, stables et sans pôles sur l'axe imaginaire.
- RH_2 est l'ensemble des transferts à coefficients réels stables et strictement propres.
- RH_∞ est l'ensemble des transferts à coefficients réels stables et propres.

Si on considère maintenant un système $\Sigma(s)$ tel que

$$Y(s) = \Sigma(s)U(s)$$

alors on définit une norme induite

$$\|\Sigma\| = \sup_{U \in \mathsf{L}_2} \frac{\|Y\|_2}{\|U\|_2}$$

dans le cas scalaire on obtient

$$\|\Sigma\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| = \sup_{U \in \mathsf{L}_2} \frac{\|GU\|_2}{\|U\|_2}$$

Forme de Smith

Notons $\mathbb{F}(s)$ l'ensemble des polynômes en s à coefficients réels ou complexes.

Une matrice polynomiale $Q(s) \in \mathbb{F}(s)^{n\mathrm{x}n}$ est unimodulaire si est seulement si det $\{Q(s)\}$ est une constante.

Le rang d'une matrice polynomiale $Q(s) \in \mathbb{F}(s)^{n\mathrm{x}m}$ est le rang maximal des mineurs de $Q(s)$.

Forme de Smith

Pour toute matrice polynomiale $P(s)$, il existe deux matrices polynomiales unimodulaires $U(s)$ et $V(s)$ telles que

$$U(s)P(s)V(s) = S(s) := \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_r(s) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\gamma_i(s)$ divisant $\gamma_{i+1}(s)$ ($\exists k_i(s) \in \mathbb{F}(s) \quad : \quad \gamma_{i+1}(s) = k_i(s)\gamma_i(s)$).

La matrice $S(s)$ est appelée la forme Smith de la matrice polynomiale $P(s)$.

r est le rang de $P(s)$.

Forme de Smith–McMillan

Soit une matrice de transfert propre $G(s) \in F[s]^{p\mathrm{x}m}$ où $F[s]$ désigne l'ensemble des fonctions rationnelles en s, alors il existe deux matrices polynomiales $U(s)$ et $V(s)$ telles que

$$U(s)G(s)V(s) = M(s) := \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1(s)}{\beta_1(s)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2(s)}{\beta_2(s)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha_r(s)}{\beta_r(s)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha_i(s)$ divisant $\alpha_{i+1}(s)$ et $\beta_{i+1}(s)$ divisant $\beta_i(s)$.

Forme de Smith–McMillan

Une manière de déterminer la forme de Smith–McMillan est d'écrire $G(s)$ sous la forme

$$G(s) = \frac{1}{d(s)}\, N(s)$$

avec $d(s) \in \mathbb{F}(s)$ et $N(s) \in \mathbb{F}(s)^{pxm}$ (matrice polynomiale). Déterminer la forme de Smith de $N(s)$, soit $S(s) = U(s)N(s)V(s)$ alors la forme de Smith–McMillan de $G(s)$ est donnée par

$$M(s) = \frac{1}{d(s)}\, S(s)$$

Forme de Smith–McMillan

Le degré de McMillan n du transfert $G(s)$ est donné par

$$n = \sum_i \deg\{\beta_i(s)\}$$

Le degré de McMillan n n'est autre que la dimension d'une réalisation minimale de $G(s)$.

Soulignons que les pôles de $G(s)$ sont les racines des polynômes $\beta_i(s)$ et les zéros de transmission de $G(s)$ sont les racines des polynômes $\alpha_i(s)$.

Factorisation première dans RH_∞

- Deux polynômes sont premiers entre eux s'ils n'ont comme facteurs communs que des constantes.
- Deux fonctions de transfert dans RH_∞ sont copremières si tout facteur commun est nécessairement stable et inversible.

  D'une manière équivalente, si $x(s)$ et $y(s)$ sont copremières RH_∞ alors il existe $a(s)$ et $b(s)$ dans RH_∞tels que (égalité de Besout)

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) = 1$$

Factorisation première dans RH_∞

- Deux matrices de transfert $M(s)$ et $N(s)$ sont copremières à droite dans RH_∞ s'il existe deux matrices de transfert $X(s)$ et $Y(s)$ dans RH_∞ vérifiant l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = I$$

- Deux matrices de transfert $\tilde{M}(s)$ et $\tilde{N}(s)$ sont copremières à gauche dans RH_∞ s'il existe deux matrices de transfert $\tilde{X}(s)$ et $\tilde{Y}(s)$ dans RH_∞ vérifiant l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} = I$$

Factorisation première dans RH_∞

Soit le transfert $P(s)$ donné par sa représentation d'état

$$P := \left[\begin{array}{ccc} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ C & \vdots & D \end{array}\right] = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

Soit F choisie de manière à assurer la stabilité de $(A+BF)$ alors si on applique la commande

$$u(t) = Fx(t) + v(t)$$

au système de matrice de transfert $P(s)$ où $x(t)$ représente l'état du système on obtient

Factorisation première dans RH_∞

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A+BF)\,x(t) + Bv(t)\\
u(t) &= Fx(t) + v(t)\\
y(t) &= (C+DF)\,x(t) + Dv(t)
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$N(s) : \left\{ \begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A+BF)\,x(t) + Bv(t)\\
y(t) &= (C+DF)\,x(t) + Dv(t)
\end{aligned} \right.$$

$$M(s) : \left\{ \begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A+BF)\,x(t) + Bv(t)\\
u(t) &= Fx(t) + v(t)
\end{aligned} \right.$$

ce qui nous permet d'écrire

$$Y(s) = N(s)V(s)$$

et

$$U(s) = M(s)V(s)$$

autrement dit

$$Y(s) = N(s)M^{-1}(s)U(s) = P(s)U(s)$$

ou encore

$$P(s) = N(s)M^{-1}(s)$$

ce qui signifie que le couple $(N(s), M(s))$ représente une factorisation à droite de $P(s)$.

Factorisation première dans RH_∞

$$M := \begin{bmatrix} A+BF & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ F & \vdots & I \end{bmatrix}$$

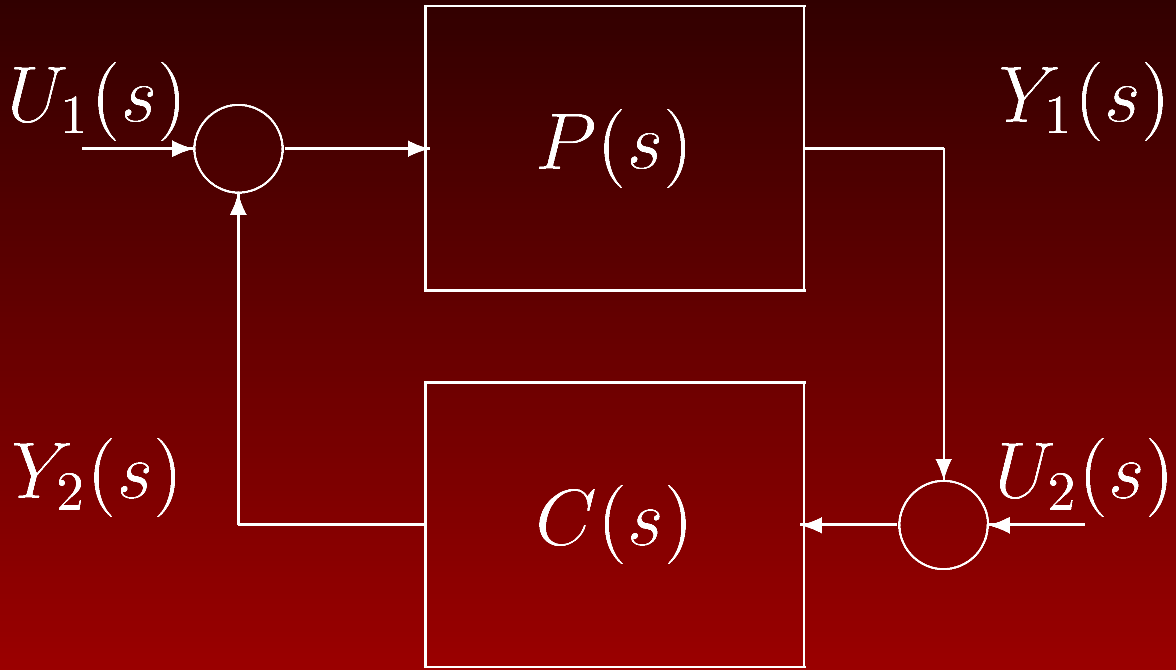
$$N := \begin{bmatrix} A+BF & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ C+DF & \vdots & D \end{bmatrix}$$

la factorisation à gauche est donnée par :

$$\tilde{M} := \begin{bmatrix} A + LC & \vdots & -L \\ \dots & \dots & \dots \\ C & \vdots & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N} := \begin{bmatrix} A + LC & \vdots & -(B + LD) \\ \dots & \dots & \dots \\ C & \vdots & D \end{bmatrix}$$

Soit le système bouclé suivant



Notons les signaux à la sortie des sommateurs par $E_1(s)$ et $E_2(s)$ on a alors

$$
\begin{aligned}
E_1 &= U_1 + CE_2 \\
E_2 &= U_2 + PE_1
\end{aligned}
$$

Stabilité interne

d'où

$$\begin{bmatrix} I & -C \\ -P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent le système sera bien posé si la matrice

$$\begin{bmatrix} I & -C \\ -P & I \end{bmatrix}$$

est inversible et la stabilité interne sera assurée si cet inverse est stable, *i.e.*

$$\begin{bmatrix} I & -C \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \text{ stable}$$

Stabilité interne

Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(P,C) &= \begin{bmatrix} I & -C \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (I-CP)^{-1} & (I-CP)^{-1}C \\ (I-PC)^{-1}P & (I-PC)^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned}(I-CP)^{-1} &= I + CP\,(I-CP)^{-1} \\ &= I + C\,(I-PC)^{-1}P\end{aligned}$$

ainsi que

$$(I-CP)^{-1}C = C\,(I-PC)^{-1}$$

Stabilité interne

Les transferts $P(s)$ et $C(s)$ sont décrits par leurs décompositions fractionnaires irréductibles comme suit

$$\begin{aligned} P(s) &= N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \\ C(s) &= U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s) \end{aligned}$$

avec $N(s),\ M(s),\ \tilde{N}(s),\ \tilde{M}(s),\ U(s),\ V(s),\ \tilde{U}(s),\ \tilde{V}(s)$ des transferts stables tels que

$$\begin{aligned} N(s),\ M(s) &\text{ premiers entre eux,} \\ \tilde{N},\ \tilde{M}(s) &\text{ premiers entre eux,} \\ U(s),\ V(s) &\text{ premiers entre eux,} \\ \tilde{U},\ \tilde{V}(s) &\text{ premiers entre eux} \end{aligned}$$

Stabilité interne

or

$$
\begin{aligned}
(I - PC)^{-1} &= \left(I - \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)U(s)V^{-1}(s) \right)^{-1} \\
&= V(s)\left(\tilde{M}(s)V(s) - \tilde{N}(s)U(s) \right)^{-1} \tilde{M}(s)
\end{aligned}
$$

ce qui donne pour la matrice $\mathcal{H}(P, C)$:

$$
\mathcal{H}(P, C) = \left[\begin{array}{c:c} I - U\left(\tilde{M}V - \tilde{N}U\right)^{-1}\tilde{N} & U\left(\tilde{M}V - \tilde{N}U\right)^{-1}\tilde{M} \\ V\left(\tilde{M}V - \tilde{N}U\right)^{-1}\tilde{N} & V\left(\tilde{M}V - \tilde{N}U\right)^{-1}\tilde{M} \end{array} \right]
$$

Stabilité interne

Il ressort de l'expression de $\mathcal{H}(P, C)$ que le système sera stable d'une manière interne si et seulement si le transfert

$$\left(\tilde{M}V - \tilde{N}U\right)^{-1}$$

est stable autrement dit, le transfert

$$\tilde{M}V - \tilde{N}U$$

est unimodulaire (stable et à inverse stable).

Stabilité interne : Théorème

Les trois propositions sont équivalentes

- $C(s)$ stabilise $P(s)$ d'une manière interne.
- Le transfert $\tilde{M}V - \tilde{N}U$ est unimodulaire.
- Le transfert $\tilde{V}M - \tilde{U}N$ est unimodulaire.

Stabilité interne : Corllaire

Les trois propositions sont équivalentes

- $C(s)$ stabilise $P(s)$ d'une manière interne.
- il existe (U, V) tel que

$$\tilde{M}V - \tilde{N}U = I$$

  et $C(s) = U(s)V^{-1}(s)$.
- Il existe $(\tilde{U}, \tilde{V})$ tel que

$$\tilde{V}M - \tilde{U}N = I$$

  et $C(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s)$.

Remarquons que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(P,C) &= \begin{bmatrix} I & -C \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} I & -UV^{-1} \\ -NM^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} M & -U \\ -N & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1}
\end{aligned}
$$

et d'une manière équivalente

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(P,C) &= \begin{bmatrix} I & -C \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} I & -\tilde{V}^{-1}\tilde{U} \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{N} & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \tilde{V}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{V} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Stabilité interne : Théorème

Compte tenu de ce qui précède nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Les trois propositions sont équivalentes

- $C(s)$ stabilise $P(s)$ d'une manière interne.
- Le transfert $\begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}$ est unimodulaire.
- Le transfert $\begin{bmatrix} M & -U \\ -N & V \end{bmatrix}$ est unimodulaire.

Remarquons que pour tout transfert stable $Q(s)$ nous avons

$$\begin{bmatrix} I & Q(s) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & -Q(s) \\ 0 & -I \end{bmatrix} \text{ unimodulaires.}$$

ce qui nous permet de dire que pour tout correcteur $C_0(s) = U_0(s)V_0^{-1}(s)$ stabilisant le système $P(s) = N(s)M^{-1}(s)$, le transfert

$$\begin{bmatrix} M & -U_0 \\ -N & V_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -Q(s) \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -(MQ + U_0) \\ -N & (NQ + V_0) \end{bmatrix}$$

est unimodulaire.

Paramétrage des correcteurs

Par conséquent si le transfert

$$\begin{bmatrix} M & -(MQ+U_0) \\ -N & (NQ+V_0) \end{bmatrix}$$

est unimodulaires, alors

$$C(s) = (M(s)Q(s)+U_0(s))\,(N(s)Q(s)+V_0(s))^{-1}$$

est bien un correcteur stabilisant le système $P(s) = N(s)M^{-1}(s)$ pour tout transfert stable $Q(s)$.

De même

$$\tilde{C}(s) = \left(\tilde{Q}(s)\tilde{N}(s)+\tilde{V}_0(s)\right)^{-1}\left(\tilde{Q}(s)\tilde{M}(s)+\tilde{U}_0(s)\right)$$

est stabilisant pour tout transfert stable $\tilde{Q}(s)$.